

Python

TOUT !!

En particulier :

Simulation de lois usuelles discrètes et à densité : uniforme, binômiale, Bernoulli, géométrique, Poisson. Méthode d'inversion (guidé) pour simuler une variable à densité. Retour sur les matrices en Python : toutes les instructions au programme, notamment `np.shape(A)` qui renvoie la taille de la matrice A . Sommes de colonnes (ou de lignes) d'une matrice. Utilisation de booléens (vrai/faux). Estimateurs, méthode de Monte-Carlo.

Objectif : faire le plein de points en Python !!

Chapitre 12 - Estimation

1. **Vocabulaire :** notion d'échantillon i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) $(X_1, \dots, X_n)$ de même loi qu'une variable X donné.

On considère une variable X dont la loi dépend d'un réel θ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Définition d'un estimateur $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ de $g(\theta)$.
3. Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est **sans biais** si $E(T_n) = g(\theta)$.
4. Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est **convergent** si $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$.
5. Si $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ et f est une fonction continue alors $f(T_n) \xrightarrow{P} f(g(\theta))$.
6. La moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ est un estimateur sans biais et convergent de $m = E(X)$.
7. **condition suffisante de convergence :** si $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$ alors $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ (T_n est un estimateur convergent de $g(\theta)$).
8. **comparaison de deux estimateurs :** si l'on dispose de plusieurs estimateurs de $g(\theta)$, le plus intéressant est celui pour lequel la quantité $V(T_n) + (E(T_n) - g(\theta))^2$ est la plus faible.
9. **Intervalle de confiance**

Définitions : **intervalle de confiance**, **intervalle de confiance asymptotique**.

Nous avons vu différents exemples.

Retenir pour la construction d'un intervalle de confiance pour la **loi de Bernoulli** :

pour tout $p \in [0, 1]$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ (via une étude de variations rapide).

Ingrédients pour la construction d'un intervalle de confiance : Markov, IBT, lois usuelles (dont loi normale !!), TCL...

10. **Méthode de Monte Carlo :** méthode pour estimer l'espérance $m = E(Y)$ d'une variable aléatoire Y ou une certaine probabilité.

Application à différents calculs approchés d'intégrales, de séries, de sommes finies.

Le plus souvent $Y = g(X)$ où X suit une loi usuelle discrète (estimation de somme ou de série) ou à densité (estimation d'une intégrale) que l'on peut simuler sur Python et g est une fonction bien choisie.

On estime alors l'espérance m par la moyenne empirique $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

Exercice de cours à savoir refaire

Soit $M = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2} dt$.

- (a) Ecrire M comme l'espérance d'une variable aléatoire Y .
- (b) Ecrire un programme Python, qui définit la fonction g où $g(t) = \frac{4}{1+t^2}$ puis qui affiche une estimation de M par la méthode de Monte-Carlo pour un échantillon de taille n .
- (c) Calculer la valeur exacte de M . Objectif du programme précédent ?

Chapitre 13 - Formes quadratiques

- Forme quadratique associée à une matrice symétrique A : définition.
- **Théorème :**
 - $\text{Spec}(A) \subset [0; +\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) \geq 0$ (q_A est positive).
 - $\text{Spec}(A) \subset]0; +\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, q_A(x) > 0$ (q_A est définie positive).
 - $\text{Spec}(A) \subset]-\infty, 0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) \leq 0$ (q_A est négative).
 - $\text{Spec}(A) \subset]-\infty, 0[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, q_A(x) < 0$ (q_A est définie négative).
 - Si A possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors q_A change de signe.

Preuve à comprendre car très classique !

- **Méthodes pour étudier le signe d'une forme quadratique :**
 1. Tester quelques valeurs. Si on obtient une valeur > 0 et une valeur < 0 alors q_A change de signe!
 2. Ecrire q_A comme une somme/différence de carrés. On essaie d'"épouser une inconnue" en faisant apparaître tous les termes correspondants dans un premier carré, puis on recommence.
 3. On calcule $\text{Spec}(A)$ et on applique le Théorème. Il faut d'abord calculer $\text{Spec}(A)$ (plus long !)

BIENTOT LA FIN !!!

Plus qu'une quinzaine de colle et les fonctions de plusieurs variables !