Énoncés

- stabilité de la loi Poisson : si X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres $a(>0)$ et $b(>0)$, et sont indépendantes, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $a+b$ - Démo
- exercice 4, fiche 5 : loi de min (X,Y)
- exercice 4, fiche 5 : loi de $X+Y$

Démonstrations :

1. Stabilité de la loi de Poisson
   Prenons $X \hookrightarrow \mathscr{P}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(b,)$ X et Y indépendantes.
   Alors $X+Y$ suite une loi de Poisson de paramètre $a+b$
   Démo :
   Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=N$, alors $X+Y(\Omega)=\mathbb{N}$
   Pour $n\in\mathbb{N}$, l'événement $X+Y=n$ est réalisé si $(X=k)\cap(Y=n-k)$ pour un entier k compris entre 0 et n, c'est-à-dire

$$(X+Y=n)=\bigcup_{k=0}^{n}(X=k\cap Y=n-k)$$

   ces événements sont incompatibles

$$\mathbf{P}(X+y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X=k\cap Y=n-k)$$

   Les variables X et Y sont indépendantes

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=n)&=\sum_{k=0}^{n}e^{-a}\frac{a^k}{k!}e^{-b}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}\\&=e^{(a+b)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}\end{aligned}$$

   idée : formule du binôme en faisant apparaître $n!$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=n)&=e^{-(a+b)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\binom{n}{k}}a^kb^{n-k}\\&=e^{-(a+b)}\frac{1}{n!}(a+b)^n\end{aligned}$$

   On reconnaît : $\boxed{X+Y\hookrightarrow\mathscr{P}(a+b)}$

2. Exemple de loi du minimum de deux VARD
   Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $p\in]0,1[$.
   On pose alors $U=min(X,Y)$
   Déterminons la loi de U
   Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on remarque que U est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*, (U\geqslant k)=(X\geqslant k)\cap(Y\geqslant k)$$

   Par indépendance de X et Y, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U\geqslant k)&=\mathbf{P}(X\geqslant k)\mathbf{P}(Y\geqslant k)\\&=\mathbf{P}(X\geqslant k)^2\\ \text{Or }\mathbf{P}(X\geqslant k)&=\sum_{i=k}^{+\infty}\mathbf{P}(X=i)\\&=\sum_{i=k}^{+\infty}p(1-p)^{i-1}\\&=p(1-p)^{k-1}\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p)^j\\&=p(1-p)^{k-1}\frac{1}{p}=(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

Alors $\mathbf{P}(U \geqslant k) = (1-p)^{2k-2}$.
Comme U est à valeurs entières, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(U = k) &= \mathbf{P}(U \geqslant k) - \mathbf{P}(U \geqslant k+1) \\ &= (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k} \\ &= (1-p)^{2k-2}\left[1-(1-p)^2\right] \\ &= \left[1-(1-p)^2\right]\left[(1-p)^2\right]^{k-1}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{U \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1-(1-p)^2}$

3. Exemple de loi de la somme de deux VARD :
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.
On pose alors $Z - X + Y$
Déterminons la loi de Z
Les variables X et Y étant indépendantes, on peut appliquer la formule du produit de convolution :
Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1} \\ &= p^2\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2} \\ &= p^2(n-1)(1-p)^{n-2}\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Z = n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}}$