

Calculs numériques

1 Opérations sur les nombres réels

1.1 Additions et soustractions

Proposition 1 :

- L'addition est **commutative**, c'est-à-dire pour tous réels a et b ,

$$a + b = b + a.$$

- L'addition est **associative**, c'est-à-dire pour tous réels a , b et c ,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Remarque :

Citer une situation de la vie courante non commutative (succession de deux tâches que nous ne pouvons pas intervertir) :

Se déshabiller puis se laver par exemple.

Exemple 1 :

Simplifier la somme $A = 3 + x + 4$ grâce aux propriétés de l'addition.

$A = x + 3 + 4$ car l'addition est commutative.

$A = x + 7$ car l'addition est associative.

Proposition 2 :

Pour tous réels a , b et c ,

$$a - (b + c) = a - b - c \text{ et } a - (b - c) = a - b + c.$$

Méthode : Supprimer des parenthèses avant un signe « + » ou un signe « - »

Commençons par repérer le signe qui précède la parenthèse que nous souhaitons supprimer :

- S'il s'agit d'un signe « + », nous supprimons les parenthèses sans rien changer de plus.
- S'il s'agit d'un signe « - », nous supprimons les parenthèses en changeant le signe de tous les termes à l'intérieur de la parenthèse.

Exemple 2 :

Simplifier les expressions suivantes.

- $A = x - 1 + (1 - x) = x - 1 + 1 - x = 0.$
- $B = x - 1 - (x + 1) = x - 1 - x - 1 = -2.$

1.2 Multiplications et divisions

Proposition 3 :

- La multiplication est commutative, c'est-à-dire pour tous réels a et b ,

$$a \times b = b \times a.$$

- La multiplication est associative, i.e. pour tous réels a , b et c ,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

Exemple 3 : Simplifier le produit $A = 2 \times x \times 5$ grâce aux propriétés de la multiplication.

$A = 2 \times 5 \times x$ car la multiplication est commutative.

$A = (2 \times 5) \times x = 10x$ car la multiplication est associative.

Proposition 4 :

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Si c est un réel non nul, alors

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Méthode : Simplifier des fractions.

1. Pour simplifier une fraction, nous essayons de trouver un facteur commun au numérateur et au dénominateur. Nous décomposons alors le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de nombres contenant ce facteur commun.
2. Une fois la fraction simplifiée, nous regardons si nous pouvons à nouveau simplifier la fraction obtenue.
3. Continuons ainsi jusqu'à ce que la fraction ne puisse plus être simplifiée (nous parlons alors de **fraction irréductible**).

Exemple 4 : Simplifier les fractions suivantes.

•

$$A = \frac{42}{98} = \frac{2 \times 21}{2 \times 49} = \frac{21}{49} = \frac{7 \times 3}{7 \times 7} = \frac{3}{7}.$$

•

$$A = \frac{5x^2}{25x} = \frac{5x}{25} = \frac{5x}{5 \times 5} = \frac{1}{5}$$



Il s'agit de l'unique règle de simplification d'une fraction et elle concerne les FACTEURS d'un produit! Cela ne fonctionne pas du tout avec des additions.

Exemple 5 :

$$\frac{12+4}{6+4} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ mais pas } \frac{12}{6} = 2.$$

Méthode :

- Pour additionner (ou soustraire) des fractions, nous commençons par les mettre au même dénominateur PUIS nous ajoutons (ou soustrayons) les numérateurs.
- Pour multiplier des fractions, nous multiplions les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
- Pour diviser par une fraction, nous multiplions par son INVERSE.

Exemple 6 : Donner les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

- $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{7}{3 \times 7} + \frac{3}{3 \times 7} = \boxed{\frac{10}{21}}.$
- $B = \frac{2}{5} \times \frac{25}{7} = \frac{2 \times 5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \boxed{\frac{10}{7}}.$
- $C = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2 \times 2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$

Remarque : Nous donnerons TOUJOURS le résultat sous forme irréductible cela simplifiera les futurs calculs!

1.3 Puissance entière**Définition 1 :**

Soient n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire « **a puissance n** ») est le produit de n facteurs tous égaux à a , c'est-à-dire :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Si a est non nul alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Par convention $a^0 = 1$

Exemple 7 :

Calculer les nombres suivants

- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 = \boxed{81}.$

$$\bullet \quad 2^{-3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

Proposition 5 : (Calculs avec des puissances)

Pour tous réels a et b et tous entiers relatifs m et n ,

$$a^1 = a, a^m \times a^n = a^{m+n}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a^n)^m = a^{nm}, (ab)^n = a^n \times b^n \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Corollaire 6 :

Soient a un réel et n un entier naturel. Alors :

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exemple 8 :

Calculer les nombres suivants.

- $A = 2^2 \times 2^{-4} \times 2 = 2^2 \times 2^{-4} \times 2^1 = 2^{2-4+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $B = \frac{5^8}{5^7} = 5^{8-7} = 5^1 = 5$
- $C = \frac{(3^2)^4}{3^5} = \frac{3^{2 \times 4}}{3^5} = \frac{3^8}{3^5} = 3^{5-8} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

1.4 Racines carrées

Définition 2 :

Soit a un réel POSITIF OU NUL. Appelons **racine carrée** de a , l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$. Nous le notons $x = \sqrt{a}$.

Proposition 7 : Soient a et b deux réels positifs,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si } b \neq 0$$

Méthode : Calculer et simplifier des racines carrées

Pour calculer et simplifier des racines carrées, il convient de distinguer deux types de nombres :

- Les carrés parfaits, dont nous pouvons calculer directement la racine. Nous pouvons ainsi retenir que



$$\begin{array}{lllll}
 \sqrt{0} = 0 & \sqrt{1} = 1 & \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 \\
 \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{64} = 8 & \\
 \sqrt{81} = 9 & \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \\
 \sqrt{169} = 13 & \sqrt{196} = 14 & \sqrt{225} = 15 & \sqrt{256} = 16 &
 \end{array}$$

- Les autres nombres. Pour les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, la racine carrée « ne tombe pas juste ». Nous essayons alors de simplifier en écrivant la racine sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible. Pour cela l'idée est de décomposer le nombre de départ sous la forme du produit d'un carré parfait par un autre nombre puis d'utiliser la première propriété de la proposition précédente.

Exemple 9 :

Écrire $\sqrt{54}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b l'entier le plus petit possible.

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}.$$

En général,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Par exemple

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ mais } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Remarque :

Notons que nous pouvons aussi exprimer la racine carrée comme une puissance de $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire pour a positif :

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 10 :

$$\sqrt{25} = 5 = 25^{\frac{1}{2}}$$

2 Calcul littéral

2.1 Règles de priorité

Méthode : Appliquer les règles de priorité

Afin de mener à bien des calculs, il faut savoir dans quel ordre effectuer les différentes opérations.

Pour cela, il est indispensable de parfaitement maîtriser les règles de priorité. Celles-ci sont rappelées ci-dessous :

1. Effectuons d'abord les calculs des expressions entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus à l'intérieur.
2. Effectuons les puissances AVANT les multiplications, divisions, additions et soustractions.
3. Effectuons d'abord les multiplications et les divisions AVANT les additions et les soustractions.
4. Enfin, nous effectuons les additions et les soustractions.

Exemple 11 :

$$A = 5 - 4 \times 3 + 5 \times (3 - 6) = 5 - 12 + 5 \times (-3) = 5 - 12 - 15 = 5 - 27 = \boxed{-22}$$

$$B = \frac{2 \times (4 - 2)}{3^2 \times 2^2} = \frac{2 \times 2}{9 \times 4} = \frac{4}{9 \times 4} = \frac{1}{9}$$



Il ne faut surtout pas confondre $(-5)^2$ et -5^2 .

D'un côté $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ et de l'autre $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$.

2.2 Développement

Définition 3 :

Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme.

Proposition 8 : (distribution de la multiplication)

Soient a, b, c, d et k des réels. Alors :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple 12 :

Développer les expressions suivantes.

- $A = (x-4)(-2x+3) = -2x^2 + 3x + 8x - 12 = -2x^2 + 11x - 12$
- $B = (x-4)(2x-1)(x^2-5x+6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$
- $C = (x+1)(x-3) - x(2x-1) = x^2 - 3x + x - 3 - 2x^2 + x = -x^2 - x - 3$

2.3 Factorisation**Définition 4 :**

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en produit.

Les règles utiles à la factorisation sont les mêmes que celles utilisées pour développer une expression, cette fois écrites dans l'autre sens :

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

Factoriser consiste donc à identifier le facteur commun aux différents termes d'une somme (ici c'est k) et à regrouper entre parenthèses les facteurs complémentaires associés (ici ce sont a et b).

Méthode : Factoriser une expression

Pour mener à bien une factorisation, il faut :

1. Identifier le facteur commun.
2. Identifier les facteurs complémentaires.
3. Identifier les signes à placer entre les facteurs complémentaires

Exemple 13 :

Factoriser les expressions suivantes.

$$A = 8x + 12 = \underline{4} \times 2x + \underline{4} \times 3 = \underline{4}(2x + 3)$$

$$B = (x-4)(2x-3) + (x-4) = \underline{(x-4)}(2x-3) + \underline{(x-4)} \times 1 = \underline{(x-4)}((2x-3) + 1) = (x-4)(2x-3+1) = (x-4)(2x-2)$$

$$C = (x-2)^2 - (x-2)(2x-3) = \underline{(x-2)}(x-2) - \underline{(x-2)}(2x-3) = \underline{(x-2)}((x-2) - (2x-3)) = (x-2)(x-2-2x+3) = (x-2)(-x+1)$$

2.4 Identités remarquables

Proposition 9 : Identités remarquables à connaître par cœur :



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Preuve

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{par commutativité de l'addition}$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{par commutativité de l'addition}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \quad \text{par commutativité de l'addition}$$

Méthode : Développer ou factoriser à l'aide d'une identité remarquable.

Les identités remarquables permettent de développer ou de factoriser rapidement des expressions comportant des carrés. Pour développer ou factoriser une expression à l'aide d'une des trois identités remarquables, il s'agit à chaque fois d'identifier la formule à utiliser puis les coefficients a et b correspondants. Dans le cas d'une factorisation, cette dernière étape est plus difficile :

- Pour les deux premières identités, il s'agit de mettre en évidence les deux termes au carré afin d'identifier a et b , puis de s'assurer que le terme restant correspond bien au terme $\pm 2ab$.
- Pour la troisième identité, il s'agit d'identifier des différences de carrés $a^2 - b^2$.

Exemple 14 :

Développer les expressions suivantes.

En utilisant la première identité remarquable :

$$A(x) = (8x + 4)^2 = (8x)^2 + 2 \times 8x \times 4 + 4^2 = 64x^2 + 64x + 16$$

En utilisant la deuxième identité remarquable :

$$B(x) = (2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + (1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

Exemple 15 :

Factoriser les expressions suivantes :

Nous reconnaissons la première identité remarquable :

$$A(x) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = (3x + 5)^2$$

Nous reconnaissons la deuxième identité remarquable :

$$B(x) = 49x^2 - 70x + 25 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 5 + 5^2 = (7x - 5)^2$$

Nous reconnaissons la troisième identité remarquable :

$$C(x) = 225x^2 - 256 = (15x)^2 - 16^2 = (15x - 16)(15x + 16)$$

Nous reconnaissons la troisième identité remarquable :

$$D(x) = (2x+5)^2 - 9 = (2x+5)^2 - 3^2 = ((2x+5) - 3)((2x+5) + 3) = (2x+5-3)(2x+5+3) = (2x+2)(2x+8)$$

Méthode : Détection d'erreurs dans les calculs littéraux

Pour vérifier que le résultat obtenu est le résultat attendu il suffit souvent de le vérifier pour une ou deux valeurs par exemple en remplaçant x par 0 et par 1.