

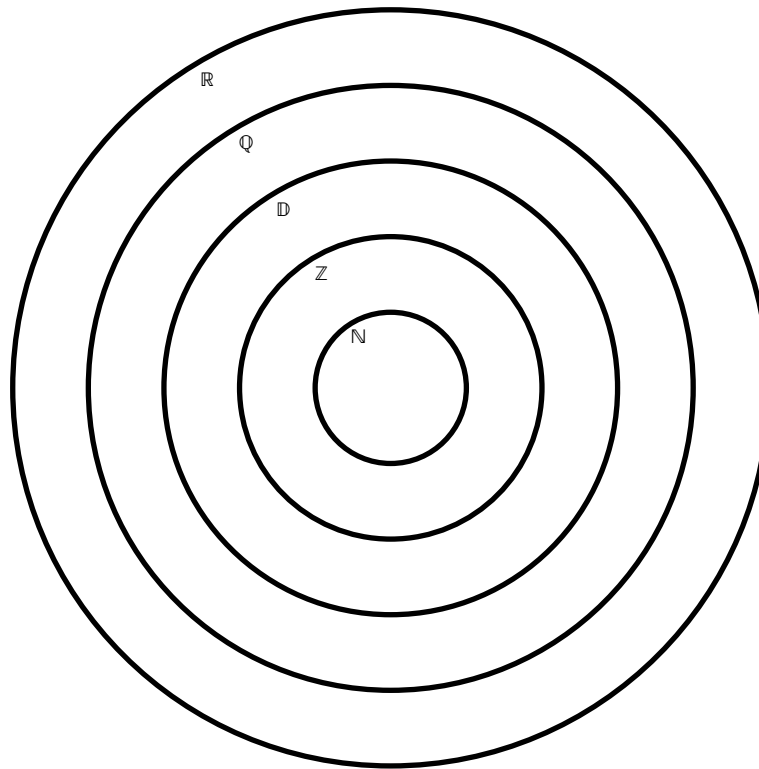
Équations inéquations

1 Ensembles usuels des nombres

1.1 Notations

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\{0; 1; 2; 3 \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés. Ex : $-5, -2, 0, 2$
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux : ensemble des quotients de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier naturel. Ex : 3.05 et 0 et 5 et $-3,01\dots$
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels : ensemble des quotients $\frac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul. Ex : $0, -5, \frac{1}{3}$
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels : il contient, outre les rationnels, des nombres dits irrationnels tels que Ex : $\sqrt{2}, \pi, 0, -5$.



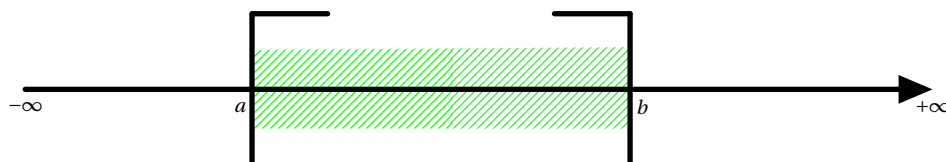
Remarque : Ces ensembles privés de 0 sont notés respectivement $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{D}^*, \mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, introduisons différents ensembles de nombres : les intervalles de $\mathbb{R}$.

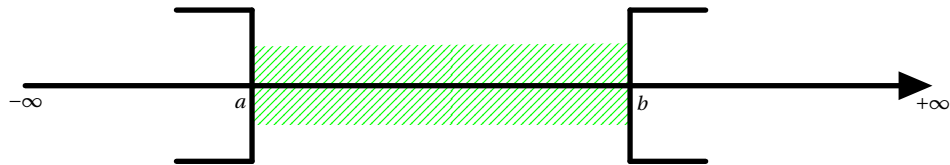
— les intervalles fermés :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$



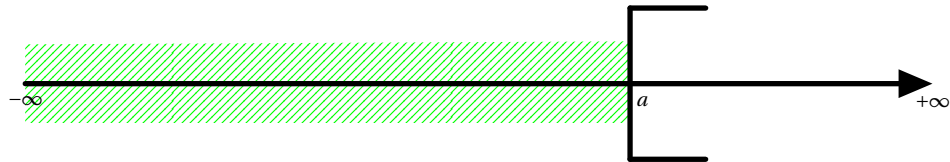
— les intervalles ouverts :

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$



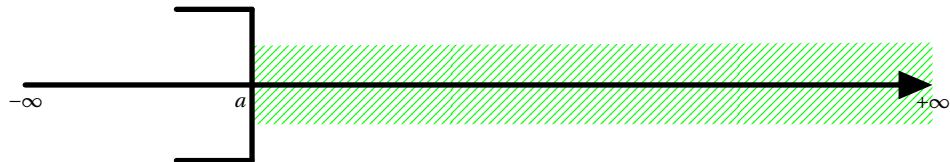
et

$$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$



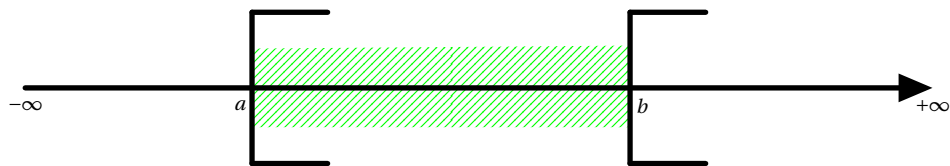
et

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$



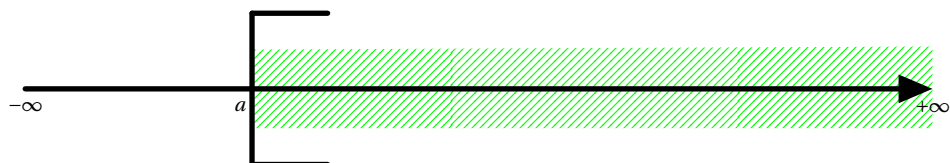
— les intervalles semi-ouverts à droite :

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$



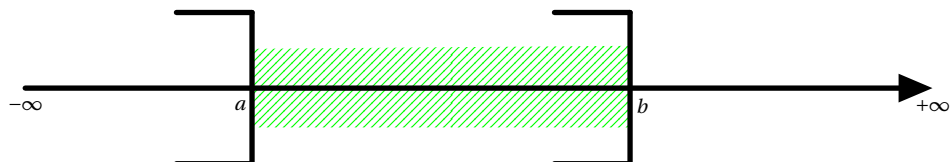
et

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$



— les intervalles semi-ouverts à gauche :

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$



Remarque :

Nous pouvons aussi être amené à considérer des intervalles d'entiers. Pour tous entiers a et b tels que $a \leq b$, notons $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :

$$\llbracket a; b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}.$$

2 Notion d'équations et d'inéquations

Définition 1 : Une **équation** est un problème mettant en jeu une égalité du type

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé inconnue de l'équation. Nous disons que nous résolvons cette équation lorsque nous recherchons l'ensemble des x qui vérifient $f(x) = 0$

Nous notons généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$$

Exemple 1 :

Résoudre l'équation : $2x + 5 = 0$

$$2x + 5 = 0 \iff 2x = -5 \iff x = -\frac{5}{2} = -2.5$$

L'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{-2.5\}$.

Définition 2 : Une **inéquation** est un problème mettant en jeu une inégalité du type

$$f(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelée inconnue de l'inéquation. Nous disons que nous résolvons cette inéquation lorsque nous recherchons l'ensemble des x qui vérifient l'inéquation.

Nous notons généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \geq 0\} \text{ ou } \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq 0\} \text{ ou } \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) > 0\} \text{ ou } \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) < 0\}.$$

Exemple 2 :

1. Résoudre $2x + 3 \geq 0$

$$2x + 3 \geq 0 \iff 2x \geq -3 \iff x \geq -\frac{3}{2} \iff x \geq -1.5$$

Donc $\mathcal{S} = [-1.5, +\infty[$.

2. Résoudre $-5x + 3 < 0$

$$-5x + 3 < 0 \iff -5x < -3 \iff x > \frac{3}{5}$$

Attention quand nous divisons par un nombre négatif il faut changer le sens des inégalités.

Donc $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$.



Lorsque nous multiplions ou divisons par un réel négatif dans une inégalité, il faut SE SOUVENIR de changer le sens de l'inégalité!

3 Tableau de signes des expressions du premier degré.

Théorème 1 : Soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

- Si $a = 0$ alors f est constante.
-

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	0	$-\infty$

Remarque : Plutôt que d'apprendre par cœur ces résultats, il est vivement conseillé de savoir retrouver les résultats précédents à partir de la résolution de l'inéquation $ax + b \geq 0$ (par exemple) ou de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax + b$ (vraie notation pour désigner une fonction $f(x)$ n'étant qu'une image de la fonction).

Exemple 3 :

1. Donner le signe de l'expression $-2x + 7$.

Nous avons :

$$-2x + 7 = 0 \iff -2x = -7 \iff x = \frac{7}{2} = 3.5$$

Le coefficient directeur de $x \mapsto -2x + 7$ est égal à $-2 < 0$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	3.5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

4 Autres résolutions d'équations et inéquations

4.1 Équations produit nul.

Théorème 2 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 4 : Résoudre $(2x + 3)(x + 5) = 0$

Nous avons un produit de facteurs nuls donc

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)(x + 5) = 0 &\iff 2x + 3 = 0 && \text{ou } x + 5 = 0 \\
 &\iff 2x = -3 && \text{ou } x = -5 \\
 &\iff x = -\frac{3}{2} = -1.5 && \text{ou } x = -5
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-5; -1.5\}$.

Remarque :

Grâce à ce théorème et à la factorisation, nous pouvons résoudre certaines équations polynômiales.

Exemple 5 :

Résoudre $(x+1)^2 - 9 = 0$ après avoir factorisé l'expression.

Nous avons

$$(x+1)^2 - 9 = (x+1)^2 - 3^2 = ((x+1) - 3)((x+1) + 3) = (x+1-3)(x+1+3) = (x-2)(x+4) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul soit

$$\begin{array}{ll} x-2=0 & \text{et } x+4=0 \\ x=2 & \text{et } x=-4 \end{array}$$

Les deux solutions sont $\boxed{2}$ et $\boxed{-4}$.

4.2 Inéquation produit

Méthode :

Résoudre une inéquation polynomiale

Le plan d'étude d'une inéquation polynomiale est le suivant :

1. Rassembler, en additionnant/soustrayant, l'ensemble des termes d'un même côté de l'inégalité car comparer par rapport à zéro c'est « juste » une étude de signe.
2. Factoriser l'expression pour obtenir un produit de facteurs de dont nous pouvons trouver le signes.
3. Étudier le signe de chacun de ces facteurs.
4. Conclure après avoir fait la synthèse des signes des facteurs dans un tableau de signes.

Exemple 6 :

Résoudre $P(x) = (2x+6)(-3x+12) \leq 0$

Nous avons $2x+6=0$ si $x = -\frac{6}{2} = -3$ et le signe de $x \mapsto 2x+6$ est positif si $x > -3$ car son coefficient directeur est 2 positif.

Nous avons $-3x+12=0$ si $x = -\frac{12}{-3} = 4$ et le signe de $x \mapsto -3x+12$ est négatif si $x > 4$ car son coefficient directeur est -3 négatif.

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$	
$-3x+12$	$+$	$+$	0	$-$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Nous avons $P(x) = (2x + 6)(-3x + 12) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[$.

4.3 Équations quotients.

Théorème 3 : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul **ET** que son dénominateur ne l'est pas. En particulier, si B n'est jamais nul, alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0$$

Méthode : Résolution d'une équation quotient

Avant de résoudre une équation quotient, nous devons chercher les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule. Nous appelons ces valeurs des valeurs interdites. Nous cherchons ensuite les valeurs pour lesquelles le numérateur s'annule et nous vérifions que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple 7 : Résoudre $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$.

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0 \iff x \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 1 = 0$$

Or

$$x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Comme 1 et -1 ne sont pas nuls, $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.

Remarque : Il est parfois nécessaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une équation contient plusieurs fractions rationnelles, nous commençons par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et nous mettons toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exemple 8 : Résoudre :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+2}$$

Nous avons :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+2} \iff \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+2} = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+2} &= \frac{(x-3)(x+2) + 2(x-1)(x+2) - 3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3x - 6 + 2x^2 + 4x - 2x - 4 - 3x^2 + 9x + 3x - 9}{(x-1)(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{13x - 19}{(x-1)(x-3)(x+2)} \end{aligned}$$

Notons que nous n'avons pas développer le dénominateur qui est déjà sous forme de produits.
Les valeurs interdites vérifient :

$$\begin{aligned}(x-1)(x-3)(x+2) = 0 &\iff x-1=0 && \text{ou } x-3=0 && \text{ou } x+2=0 \\ &\iff x=1 && \text{ou } x=3 && \text{ou } x=-2\end{aligned}$$

De plus $13x - 19 = 0 \iff x = \frac{19}{13}$.

Comme cette solution n'est pas une des valeurs interdites, nous avons : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{19}{13} \right\}$.

4.4 Inéquations quotients.

Méthode :

La méthode pour résoudre des inéquations quotient est presque la même que pour les produits.

- D'abord il faut construire un tableau de signes avec le signe du numérateur et du dénominateur.
- Au lieu de mettre des zéros pour les valeurs qui annulent le dénominateur nous utilisons des doubles barres.
- Nous concluons sur les valeurs solutions de l'inéquation.

Exemple 9 :

Résoudre $R(x) = \frac{2x+6}{-3x+12} \leq 0$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$
$-3x+12$	$+$	$+$	$-$	$-$
$R(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Nous avons $R(x) = \frac{2x+6}{-3x+12} \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -3] \cup]4; +\infty[$.

5 Polynômes du second degré.

5.1 Vocabulaire

Définition 3 :

Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$. Nous appelons **polynôme du second degré** une expression de type :

$$ax^2 + bx + c.$$

Exemple 10 :

Soit $7x^2 + 5x - 3$. Ici $a = 7$, $b = 5$ et $c = -3$

Soit $x^2 - 3$. Ici $a = 1$, $b = 0$ et $c = -3$

5.2 Résolution des équations du second degré

Définition 4 : Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$. Appelons discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. le réel noté Δ défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 4 : Soit l'équation polynomiale de degré deux $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation à **deux** solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation à **une** solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a **aucune** solution réelle.

Exemple 11 :

Résoudre les équations polynomiales de degré deux suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

Nous avons $a = 1$ et $b = -5$ et $c = 6$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1.$$

Il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

Donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$

2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Nous avons $a = 4$ et $b = -12$ et $c = 9$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0.$$

Il y a une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Donc $\mathcal{S} = \{1.5\}$

3. $x^2 + x + 9 = 0$

Nous avons $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 9 = -35 < 0.$$

Il n'y a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

Proposition 5 :

Factorisation des polynômes du second degré

Soit le polynôme de degré deux $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors avec les mêmes notations que le théorème ci-dessus :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation à **une** solution : Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors avec les mêmes notations que le théorème ci-dessus :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- Si $\Delta < 0$ alors nous ne pouvons pas factoriser $ax^2 + bx + c$.

Exemple 12 :

Factoriser les polynômes de l'exemple ci-dessus :

1. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ car $a = 1$ et nous avons vu que ce polynôme avait deux racines réelles $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - 1.5)^2$ car ce polynôme avait une seule racine $x_0 = 1.5$.
3. $x^2 + x + 9$ car ce polynôme n'admet pas de racine réelle.

Théorème 6 :

Le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$ dépend **À LA FOIS** du signe du discriminant **ET** du signe de a . Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors, en posant $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, nous avons :

si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+
f	$+\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	0	$+\infty$

si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-
f	$-\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	0	$-\infty$

- Si $\Delta \leq 0$ alors le signe de f est celui de a .

Méthode :

Le signe d'un polynôme $ax^2 + bx + c$ est celui de a à l'extérieur de ses racines. S'il y a qu'une racine ou pas de racine il est constant c'est celui de a .

Exemple 13 :

Résoudre

1. Résolvons $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. Nous avons vu que les racines du polynôme sont 2 et 3 et que $a > 0$, nous en déduisons le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	0	+

Donc $\mathcal{S} = [2; 3]$.

2. Résolvons $4x^2 - 12x + 9 > 0$. Nous avons vu que ce polynôme n'avait qu'une seule racine $x_0 = 1.5$. Ce polynôme est du signe de $a = 4$ donc positif et s'annule donc en 1.5. Donc

$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1.5\}$

3. Résolvons $x^2 + x + 9 < 0$. Ce polynôme n'a pas de racine réelle donc il est du signe de $a = 1$ soit positif sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Proposition 7 :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

1. Le produit des racines de P est égal à $\frac{c}{a}$.
2. La somme des deux racines de P est égal à $-\frac{b}{a}$

Méthode :

Si nous connaissons une des deux racines du polynôme nous pouvons trouver la seconde en utilisant la propriété ci-dessus.

Exemple 14 : Soit $P(x) = x^2 - 7x + 10$.

1. Vérifier que 2 est racine de ce polynôme.

$$P(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$$

2 est racine de ce polynôme.

2. En déduire la deuxième racine de ce polynôme. Nous avons $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$. Comme $x_1 = 2$ nous avons $x_2 = \frac{10}{2} = 5$. La deuxième racine est 2.