

Nom :

Devoir numéro 1 de mathématiques de ECT1 : 2h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits. Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement. Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise. Ce sujet comporte pages. Le sujet est volontairement trop long. Vous pouvez donc avoir une bonne note sans avoir tout traité! Dans le cas où vous repèreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement. Bon courage!

Exercice 1 :

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible

$$A = -\frac{3}{2} + \frac{5}{3}; \quad B = \frac{2}{5} - \frac{3}{4}; \quad C = \frac{5}{8} \times \left(-\frac{2}{7}\right); \quad D = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{5}}.$$

et

$$E = \frac{3}{4} \times (-2)^3 - (-3)^2; \quad F = \frac{14}{5} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) \quad \text{et} \quad G = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}.$$

Exercice 2 :

$$A = \sqrt{363} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - 3\sqrt{12}.$$

Mettre A sous la forme $a + b\sqrt{n}$ avec a , b et n nombres entiers positifs.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$8x - 1 = 1.2(x + 2) \quad x^2 = 32 \quad 2x^2 = -5.$$

Exercice 4 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$E(x) = 16x^2 - 25 - (4x - 5)(3x - 4).$$

1. Développer et réduire $E(x)$.
2. Factoriser $E(x)$.
3. Résoudre $E(x) = 0$

Exercice 5 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$F(x) = (4x + 5)^2 - (2x + 3)^2.$$

1. Développer et réduire $F(x)$.
2. Factoriser $F(x)$.
3. Résoudre $F(x) = 0$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$3(2x + 5) - 1 \geq 3x - 7.$$

Exercice 7 :

1. Donner l'écriture décimale de : $A = \frac{4 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2}$
2. Écrire sous la forme 5.3^n où n est un entier :

$$\frac{5.3^6 \times 5.3^{-2} \times 5.3^4}{(5.3^4)^3}$$

Exercice 8 : Donner le signes de

1. $f_1(x) = 5x - 3$
2. $f_2(x) = -8x + 3$
3. $f_3(x) = 12x + 6$
4. $f_4(x) = -5x - 1.$

Exercice 9 :

Soit f la fonction polynômiale de degré 2 définie par :

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 45.$$

.

1. Compléter $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$
2. Rappeler la formule du discriminant (Δ) d'une équation polynômiale de degré 2 et le calculer.
3. Rappeler les solutions d'une équation polynômiale de degré 2 (si elles existent) et les calculer.

Corrigé du devoir numéro 1 de mathématiques ECT1

Corrigé de l'exercice 1 :

Nous avons :

$$A = -\frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{-9+10}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

puis

$$B = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8-15}{20} = \boxed{-\frac{7}{20}}$$

ensuite

$$C = \frac{5}{8} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{4} \times \left(-\frac{1}{7}\right) = \boxed{-\frac{5}{28}}$$

et

$$D = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} = \boxed{\frac{25}{6}}$$

puis

$$E = \frac{3}{4} \times (-2)^3 - (-3)^2 = -6 - 9 = \boxed{-16}$$

ensuite

$$F = \frac{14}{5} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) = \frac{14}{5} \times \left(\frac{14-9}{21}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

et enfin

$$G = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{8+9}{12}}{\frac{9-5}{15}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{4}{15}} = \frac{17}{12} \times \frac{15}{4} = \boxed{\frac{85}{16}}$$

Corrigé de l'exercice 2 :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{363} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - 3\sqrt{12} \\ &= \sqrt{3 \times 121} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \times 9} - 3\sqrt{3 \times 4} \\ &= 11\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2^2} \times 3 - 3 \times 2\sqrt{3} \\ &= 11\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 2 \times 3 - 3 \times 2\sqrt{3} \\ &= \boxed{6 + 10\sqrt{3}} \quad (a = 6, b = 10 \text{ et } n = 3). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3 :

Nous avons :

$$\begin{aligned} 8x - 1 &= 1.2(x + 2) &\iff 8x - 1 &= 1.2x + 2.4 &\iff 8x - 1.2x &= 1 + 2.4 &\iff 6.8x &= 3.4 \\ &&\iff x &= \frac{3.4}{6.8} &= 0.5 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{0.5\}$

Puis $x^2 = 32$ pour $x = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$ et $x = -4\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{S} = \{-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\}$

Et enfin $2x^2 = -5$ n'a pas de solutions réelles car un carré est toujours positif sur $\mathbb{R}$

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Corrigé de l'exercice 4 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$E(x) = 16x^2 - 25 - (4x - 5)(3x - 4).$$

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} E(x) &= 16x^2 - 25 - (4x - 5)(3x - 4) = 16x^2 - 25 - (12x^2 - 16x - 15x + 20) = 16x^2 - 25 - (12x^2 - 31x + 20) \\ &= 16x^2 - 25 - 12x^2 + 31x - 20 = \boxed{4x^2 + 31x - 45} \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} E(x) &= 16x^2 - 25 - (4x - 5)(3x - 4) = (4x)^2 - 5^2 - (4x - 5)(3x - 4) \\ &= (4x - 5)(4x + 5) - (4x - 5)(3x - 4) = (4x - 5)((4x + 5) - (3x - 4)) \\ &= (4x - 5)(4x + 5 - 3x + 4) = \boxed{(4x - 5)(x + 9)}. \end{aligned}$$

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc

$$E(x) = 0 \iff 4x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 9 = 0$$

Donc

$$E(x) = 0 \iff x = \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x = -9.$$

Donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{4}; -9 \right\}$$

Corrigé de l'exercice 5 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$F(x) = (4x + 5)^2 - (2x + 3)^2.$$

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x + 5)^2 - (2x + 3)^2 = 16x^2 + 40x + 25 - (4x^2 + 12x + 9) \\ &= 16x^2 + 40x + 25 - 4x^2 - 12x - 9 \\ &= \boxed{12x^2 + 28x + 16} \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x + 5)^2 - (2x + 3)^2 \\ &= ((4x + 5) - (2x + 3))((4x + 5) + (2x + 3)) \\ &= (4x + 5 - 2x - 3)(4x + 5 + 2x + 3) \\ &= \boxed{(2x + 2)(6x + 8)}. \end{aligned}$$

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc

$$F(x) = 0 \iff 2x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 6x + 8 = 0$$

Donc

$$E(x) = 0 \iff x = -\frac{2}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Donc

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{3}; -1 \right\}$$

Corrigé de l'exercice 6 :

Nous avons

$$\begin{aligned} 3(2x + 5) - 1 \geq 3x - 7 &\iff 6x + 15 - 1 \geq 3x - 7. \iff 6x + 14 \geq 3x - 7 \\ &\iff 6x - 3x \geq -14 - 7 \iff 3x \geq -21 \iff x \geq -\frac{21}{3} \iff x \geq -7 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S} = [-7; +\infty[$$

Corrigé de l'exercice 7 :

1. Nous avons

$$\frac{4 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2} = \frac{4 \times 10^{-3-2}}{5} = 0.8 \times 10^{-5} = \boxed{0,000\ 008}$$

2.

$$\frac{5.3^6 \times 5.3^{-2} \times 5.3^4}{(5.3^4)^3} = \frac{5.3^{6-2+4}}{5.3^{12}} = 5.3^{8-12} = \boxed{5.3^{-4}}$$

Corrigé de l'exercice 8 :

1. Nous avons $f_1(x) = 5x - 3 = 0$ si $x = \frac{3}{5}$. Le coefficient directeur $a = 5$ est positif donc $f_1(x)$ est positive pour $x \geq \frac{3}{5}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
$f_1(x)$	-	0	+

2. Nous avons $f_2(x) = -8x + 3 = 0$ si $x = \frac{3}{8}$. Le coefficient directeur $a = -8$ est négatif donc $f_2(x)$ est négative pour $x \geq \frac{3}{8}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f_2(x)$	+	0	-

3. Nous avons $f_3(x) = 12x + 6 = 0$ si $x = -\frac{6}{12} = -.5$. Le coefficient directeur $a = 12$ est positif donc $f_3(x)$ est positive pour $x \geq -.5$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	.5	$+\infty$
$f_3(x)$	-	0	+

4. . Nous avons $f_4(x) = -5x - 1 = 0$ si $x = -\frac{1}{5} = -.2$. Le coefficient directeur $a = -5$ est négatif donc $f_4(x)$ est négative pour $x \geq -.2$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	-.2	$+\infty$
$f_4(x)$	+	0	-

Corrigé de l'exercice 9 :1. Nous avons $\boxed{a = 3}$, $\boxed{b = 24}$ et $\boxed{c = 45}$.2. Nous avons : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \times 3 \times 45 = 36.}$

3. Les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 - \sqrt{36}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 + \sqrt{36}}{2 \times 3} = -3$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-5, -3\}}$.