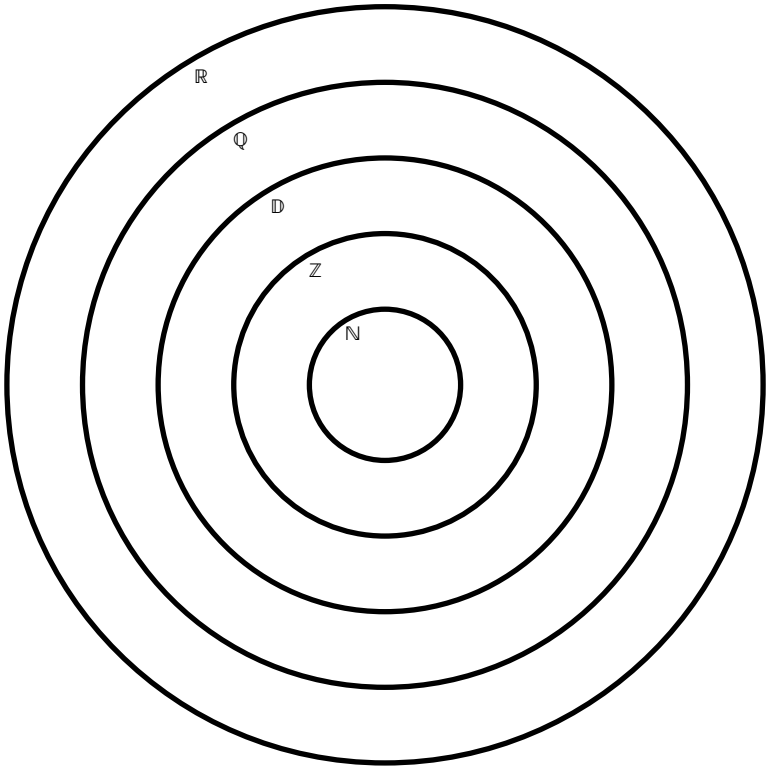
Équations inéquations

1 Ensembles usuels des nombres

1.1 Notations

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : .....
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés. Ex : .....
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux : ensemble des quotients de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier naturel. Ex : .....
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels : ensemble des quotients $p\ q$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul. Ex : .....
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels : il contient, outre les rationnels, des nombres dits irrationnels tels que Ex : .....



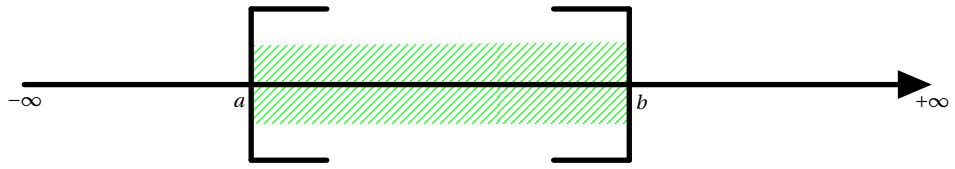
Remarque : Ces ensemble privé de 0 sont notés respectivement $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, introduisons différents ensembles de nombres : les intervalles de $\mathbb{R}$.

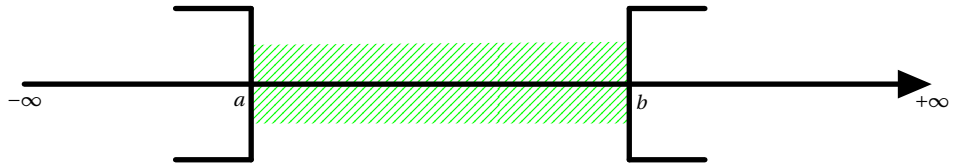
— les intervalles fermés :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}.$$



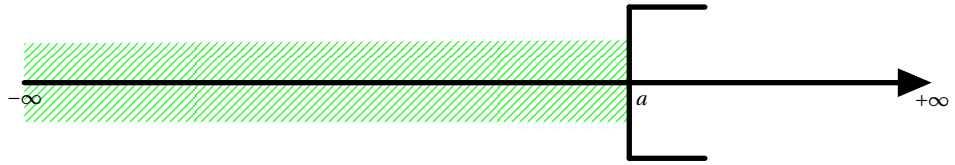
— les intervalles ouverts :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$



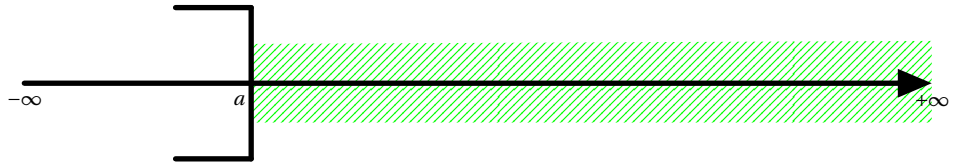
et

$$]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$$



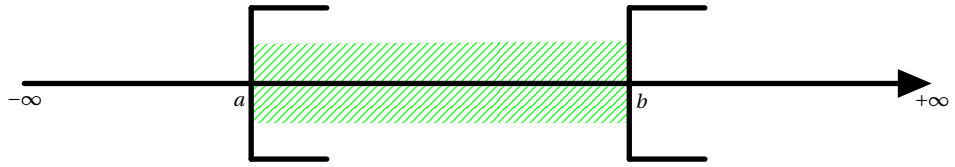
et

$$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}.$$



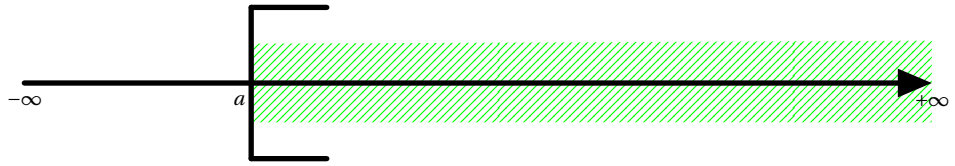
— les intervalles semi-ouverts à droite :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}.$$



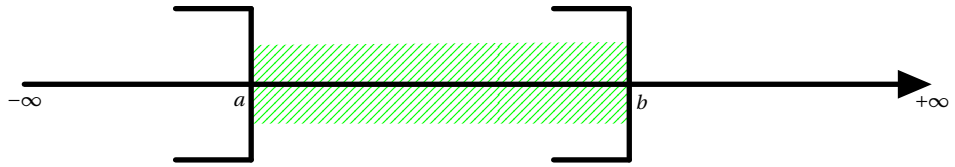
et

$$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant a\}.$$



— les intervalles semi-ouverts à gauche :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}.$$



Remarque :

Nous pouvons aussi être amené à considérer des intervalles d'entiers. Pour tous entiers a et b tels que $a \leqslant b$, notons $[\![a\,;\,b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :

$$[\![a\,;\,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}.$$

2 Notion d'équations et d'inéquations

Définition 1 : Une **équation** est un problème mettant en jeu une égalité du type

.....

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé inconnue de l'équation. Nous disons que nous résolvons cette équation lorsque nous recherchons l'ensemble des x

.....

Nous notons généralement l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation : $2x + 5 = 0$

.....

.....

.....

Définition 2 : Une **inéquation** est un problème mettant en jeu une inégalité du type

$$f(x) \geqslant 0 \text{ ou } f(x) \leqslant 0 \text{ ou } f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelée inconnue de l'inéquation. Nous disons que nous résolvons cette inéquation lorsque nous recherchons l'ensemble des x
Nous notons généralement l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

.....

Exemple 2 :

1. Résoudre $2x + 3 \geqslant 0$

   .....

   .....

   .....

2. Résoudre $-5x + 3 < 0$

   .....

   .....

   .....

Lorsque nous multiplions ou divisons par un réel négatif dans une inégalité, il faut SE SOUVENIR de changer le sens de l'inégalité !

3 Tableaux de signes des expressions du premier degré.

Théorème 1 : Soit f la fonction affine $x \mapsto ax+b$.

- Si $a=0$ alors f est constante.
-

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarque : Plutôt que d'apprendre par cœur ces résultats, il est vivement conseillé de savoir retrouver les résultats précédents à partir de la résolution de l'inéquation $ax+b \geqslant 0$ (par exemple) ou de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax+b$ (vraie notation pour désigner une fonction $f(x)$ n'étant qu'une image de la fonction).

Exemple 3 :

1. Donner le signe de l'expression $-2x+7$.

4 Autres résolutions d'équations et inéquations

4.1 Équations produit nul.

Théorème 2 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 4 : Résoudre $(2x+3)(x+5)=0$

.....

.....

.....

Remarque :

Grâce à ce théorème et à la factorisation, nous pouvons résoudre certaines équations polynômiales.

Exemple 5 :

Résoudre $(x+1)^2 - 9 = 0$ après avoir factorisé l'expression.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.2 Inéquation produit

Méthode :

Résoudre une inéquation polynomiale

Le plan d'étude d'une inéquation polynomiale est le suivant :

1. Rassembler, en additionnant/soustrayant, l'ensemble des termes d'un même côté de l'inégalité car comparer par rapport à zéro c'est « juste » une étude de signe.
2. Factoriser l'expression pour obtenir un produit de facteurs de dont nous pouvons trouver le signes.
3. Étudier le signe de chacun de ces facteurs.
4. Conclure après avoir fait la synthèse des signes des facteurs dans un tableau de signes.

Exemple 6 :

Résoudre $(2x+6)(-3x+12) \leqslant 0$

.....

.....

.....

.....

4.3 Équations quotients.

Théorème 3 : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul **ET** que son dénominateur ne l'est pas. En particulier, si B n'est jamais nul, alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Longleftrightarrow A(x) = 0$$

Méthode : Résolution d'une équation quotient

Avant de résoudre une équation quotient, nous devons chercher les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule. Nous appelons ces valeurs des valeurs interdites. Nous cherchons ensuite les valeurs pour lesquelles le numérateur s'annule et nous vérifions que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple 7 : Résoudre $\dfrac{x^2-1}{x} = 0$.

.....

.....

.....

.....

Remarque :

Il est parfois nécessaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une équation contient plusieurs fractions rationnelles, nous commençons par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et nous mettons toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exemple 8 : Résoudre :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+2}$$

.....

.....

.....

.....

4.4 Ínéquations quotients.

Méthode :

La méthode pour résoudre des inéquations quotient est presque la même que pour les produits.

- D'abord il faut construire un tableau de signes avec le signe du numérateur et du dénominateur.
- Au lieu de mettre des zéros pour les valeurs qui annulent le dénominateur nous utilisons des doubles barres.
- Nous concluons sur les valeurs solutions de l'inéquation.

Exemple 9 :

Résoudre $R(x) = \dfrac{2x+6}{-3x+12} \leqslant 0$

.....

.....

.....

.....

5 Polynômes du second degré.

5.1 Vocabulaire

Définition 3 :

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Nous appelons **polynôme du second degré** une expression de type :

$$ax^2 + bx + c.$$

Exemple 10 :

Soit $7x^2 + 5x - 3$

Donner $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

Soit $x^2 - 3$

Donner $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

5.2 Résolution des équations du second degré

Définition 4 : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Appelons discriminant du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. le réel noté Δ défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 4 : Soit l'équation polynomiale de degré deux $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation à **deux** solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation à **une** solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a **aucune** solution réelle.

Exemple 11 :

Résoudre les équations polynômiales de degré deux suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

   $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

   $\Delta =$ .....

   Il y a .....

   $x_1 =$ .....

   $x_2 =$ .....

2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

   $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

   $\Delta =$ .....

   Il y a .....

   $x_0 =$ .....

3. $x^2 + x + 9 = 0$

   $a =$ ..... $b =$ ..... $c =$ .....

   $\Delta =$ .....

   Il .....

Proposition 5 : *Factorisation des polynômes du second degré*

Soit le polynomiale de degré deux ax^2+bx+c.

- Si $\Delta = b^2-4ac>0$ alors avec les mêmes notations que le théorème ci-dessus :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation à **une** solution : Si $\Delta = b^2-4ac>0$ alors avec les mêmes notations que le théorème ci-dessus :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

- Si $\Delta<0$ alors nous ne pouvons pas factoriser ax^2+bx+c.

Exemple 12 :

Factoriser les polynômes de l'exemple ci-dessus :

1. $x^2-5x+6 =$ .....
2. $4x^2-12x+9 =$ .....
3. x^2+x+9 .....

Théorème 6 :

Le signe du polynôme ax^2+bx+c dépend **À LA FOIS** du signe du discriminant **ET** du signe de a. Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta = b^2-4ac>0$ alors, en posant $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, nous avons :

si $a>0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

si $a<0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Si $\Delta \leqslant 0$ alors le signe de f est celui de a.

Méthode :

Le signe d'un polynôme ax^2+bx+c est celui de a à l'extérieur de ses racines. S'il y a qu'une racine ou pas de racine il est constant c'est celui de a.

Exemple 13 :

Résoudre

1. $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

2. $4x^2 - 12x + 9 > 0$

   .....

3. $x^2 + x + 9 < 0$

   .....

Proposition 7 :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

1. Le produit des racines de P est égal à $\frac{c}{a}$.
2. La somme des deux racines de P est égal à $-\frac{b}{a}$

Méthode :

Si nous connaissons une des deux racines du polynôme nous pouvons trouver la seconde en utilisant la propriété ci-dessus.

Exemple 14 : Soit $P(x) = x^2 - 7x + 10$.

1. Vérifier que 2 est racine de ce polynôme.

   .....

2. En déduire la deuxième racine de ce polynôme.

   .....