

Nom :

Devoir numéro 1 de mathématiques de ECT1 : 2h

*Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont a priori interdits. Ceux d'entre vous qui ont besoin d'utiliser une calculatrice ou un résumé manuscrit du cours pourront le faire **à condition** de le dire sur la copie (j'ai utilisé une calculatrice, un résumé de cours....) Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement. Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise. Ce sujet comporte pages. Le sujet est volontairement trop long. Vous pouvez donc avoir une bonne note sans avoir tout traité! Dans le cas où vous repèreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement. Bon courage!*

Exercice 1 :

Calculer les nombres suivants en détaillant et présenter le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} \times \frac{1}{6} \quad B = \frac{7}{9} - \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{2}} \quad C = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 2 :

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant deux entiers avec b le plus petit possible.

$$\begin{array}{lll} A = \sqrt{48} & B = \sqrt{54} & C = \sqrt{50} \\ D = \sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27} & E = \sqrt{98} - 4\sqrt{50} + 7\sqrt{18} & F = \sqrt{35} \times \sqrt{42} \times \sqrt{24} \end{array}$$

Exercice 3 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$A(x) = (3x - 1)(2x + 7) - (3x - 1)^2.$$

1. Développer et réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Résoudre $A(x) = 0$.
4. Résoudre $A(x) = -8$.

Exercice 4 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$A(x) = (9x - 1)^2 - (5x - 6)^2.$$

1. Développer et réduire $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Résoudre $A(x) = 0$.
4. Calculer $A(-1)$.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$8x - 1 = 5(x + 2) \quad x^2 = 32 \quad 4x^2 = -9.$$

Exercice 6 :

Donner le signes de

1. $f_1(x) = -5x - 3$
2. $f_2(x) = 8x + 3$
3. $f_3(x) = -12x + 6$
4. $f_4(x) = 5x - 1$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction polynômiale de degré 2 définie par :

$$f(x) = 5x^2 - 11x + 2.$$

.

1. Compléter $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$
2. Rappeler la formule du discriminant (Δ) d'une équation polynômiale de degré 2 et le calculer.
3. Rappeler les solutions d'une équation polynômiale de degré 2 (si elles existent) et les calculer.

Exercice 8 : Quelles sont les valeurs des variables après l'exécution des instructions suivantes que vous traduirez en langage Python?

	Python	A	B	C	D
$A \leftarrow 1$					
$B \leftarrow 2$					
$C \leftarrow 5$					
$D \leftarrow A$					
$A \leftarrow C + 5$					
$B \leftarrow D * 2$					
$C \leftarrow 3 * C + A$					
$D \leftarrow A * C$					

Corrigé du devoir numéro 1 de mathématiques ECT1

Corrigé de l'exercice 1 :

Nous avons :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4} + \frac{7}{24} \frac{18+7}{24} = \boxed{\frac{25}{24}}$$

puis

$$B = \frac{7}{9} - \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{2}} = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{7}{9} - \frac{4}{63} = \frac{49-4}{63} = \frac{45}{63} = \frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

ensuite

$$C = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-3}{6} \times \frac{3-16}{12} \div \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} \times \frac{-13}{12} \times 2 = \frac{2 \times 13}{2 \times 3 \times 12} = \boxed{\frac{13}{36}}.$$

Corrigé de l'exercice 2 :

Nous avons :

$$A = \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4 \times 4 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

Puis

$$B = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = \boxed{3\sqrt{6}}$$

et

$$C = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

et

$$D = \sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27} = \sqrt{25 \times 3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{9 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = (5+7-6)\sqrt{3} = \boxed{6\sqrt{3}}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{98} - 4\sqrt{50} + 7\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 49} - 4\sqrt{2 \times 25} + 7\sqrt{2 \times 9} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} - 4\sqrt{25} \times \sqrt{2} + 7\sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} - 4 \times 5\sqrt{2} + 7 \times 3\sqrt{2} = (7 - 20 + 21)\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$F = \sqrt{35} \times \sqrt{42} \times \sqrt{24} = \sqrt{35 \times 42 \times 24} \sqrt{5 \times 7 \times 7 \times 6 \times 6 \times 4} = \sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{6 \times 6} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 7 \times 6 \times 2\sqrt{5} = \boxed{84 \times \sqrt{5}}$$

Corrigé de l'exercice 3 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$A(x) = (3x-1)(2x+7) - (3x-1)^2.$$

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (3x-1)(2x+7) - (3x-1)^2 = 6x^2 + 21x - 2x - 7 - (9x^2 - 6x + 1) = 6x^2 + 19x - 7 - 9x^2 + 6x - 1 \\ &= \boxed{-3x^2 + 25x - 8} \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (3x-1)(2x+7) - (3x-1)^2 = \underline{(3x-1)}(2x+7) - \underline{(3x-1)}(3x-1) \\ &= (3x-1)((2x+7) - (3x-1)) \\ &= (3x-1)(2x+7-3x+1) = \boxed{(3x-1)(-x+8)}. \end{aligned}$$

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc

$$A(x) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -x + 8 = 0$$

Donc

$$A(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = 8.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{3}; 8 \right\}$

4. Nous avons :

$$A(x) = -8 \iff -3x^2 + 25x - 8 = -8 \iff -3x^2 + 25x = 0$$

Or $-3x^2 + 25x = x(-3x + 25)$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc

$$A(x) = -8 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 25 = 0$$

Soit $x = 0$ ou $x = \frac{25}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{ \frac{25}{3}; 0 \right\}$

Corrigé de l'exercice 4 :

x désignant un nombre réel, on pose

$$A(x) = (9x - 1)^2 - (5x - 6)^2.$$

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (9x - 1)^2 - (5x - 6)^2 = 81x^2 - 18x + 1 - (25x^2 - 60x + 36) \\ &= 81x^2 - 18x + 1 - 25x^2 + 60x - 36 \\ &= \boxed{56x^2 + 42x - 35} \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (9x - 1)^2 - (5x - 6)^2 \\ &= ((9x - 1) - (5x - 6))((9x - 1) + (5x - 6)) \\ &= (9x - 1 - 5x + 6)(9x - 1 + 5x - 6) \\ &= \boxed{(4x + 5)(14x - 7)}. \end{aligned}$$

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc

$$A(x) = 0 \iff 4x + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 14x - 7 = 0$$

Donc

$$A(x) = 0 \iff x = -\frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

4. Nous avons :

$$A(-1) = 56 \times (-1)^2 + 42 \times (-1) - 35 = 56 - 42 - 35 = \boxed{-21}$$

Corrigé de l'exercice 5 :

Nous avons :

$$\begin{aligned} 8x - 1 = 5(x + 2) &\iff 8x - 1 = 5x + 10 \iff 8x - 5x = 1 + 10 \iff 3x = 11 \\ &\iff x = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{11}{3} \right\}$

Puis $x^2 = 32$ pour $x = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$ et $x = -4\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{S} = \{-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\}$

Et enfin $2x^2 = -9$ n'a pas de solutions réelles car un carré est toujours positif sur $\mathbb{R}$

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$

Corrigé de l'exercice 6 :

1. Nous avons $f_1(x) = -5x - 3 = 0$ si $x = -\frac{3}{5}$. Le coefficient directeur $a = -5$ est négatif donc $f_1(x)$ est négative pour $x \geq -\frac{3}{5}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
$f_1(x)$	+	0	-

2. Nous avons $f_2(x) = 8x + 3 = 0$ si $x = -\frac{3}{8}$. Le coefficient directeur $a = 8$ est positif donc $f_2(x)$ est positive pour $x \geq -\frac{3}{8}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f_2(x)$	-	0	+

3. Nous avons $f_3(x) = -12x + 6 = 0$ si $x = \frac{6}{12} = 0,5$. Le coefficient directeur $a = -12$ est négatif donc $f_3(x)$ est négative pour $x \geq 0,5$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$f_3(x)$	+	0	-

4. . Nous avons $f_4(x) = 5x - 1 = 0$ si $x = \frac{1}{5} = 0,2$. Le coefficient directeur $a = 5$ est positif donc $f_4(x)$ est positive pour $x \geq 0,2$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0,2	$+\infty$
$f_4(x)$	-	0	+

Corrigé de l'exercice 7 :

1. Nous avons $a = 5$, $b = -11$ et $c = 2$.

2. Nous avons : $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 121 - 40 = 81 = 9^2$.

3. Les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - \sqrt{81}}{2 \times 5} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + \sqrt{81}}{2 \times 5} = 2$$

Donc $\mathcal{S} = \{0,2; 2\}$.

Corrigé de l'exercice 8 :

Voici le tableau complété :

	Python	A	B	C	D
A ← 1	A=1	A=1			
B ← 2	B=2	A=1	B=2		
C ← 5	C=5	A=1	B=2	C=5	
D ← A	D=A	A=1	B=2	C=5	D=1
A ← C + 5	A=C+5	A=10	B=2	C=5	D=1
B ← D * 2	B=D*2	A=10	B=2	C=5	D=1
C ← 3 * C + A	C=3*C+A	A=10	B=2	C=25	D=1
D ← A * C	D=A*C	A=10	B=2	C=25	D=250