

Généralités sur les fonctions

Notation

$\forall a \in \mathbb{R} :$
 $\exists a \in \mathbb{R} :$
 $\implies :$
 $\iff :$

1 Quelques rappels

Définition 1 :

- Soit E et F des ensembles non vides. Une **fonction f de E dans F** est un objet mathématique qui, à tout élément x de E , associe **au plus un** élément y de F .
- Nous disons qu'un élément x de E admet une **image par f** s'il est associé à un élément y de F par f : nous notons alors $y = f(x)$ l'image de x par f .
- Nous disons qu'un élément y de F admet un **antécédent par f** s'il est associé à un élément x de E par f c'est à dire $y = f(x)$.

Notation Pour désigner une fonction nous pouvons écrire $f : x \mapsto \text{<son expression>}$

Exemple 1 : Si pour tout x réel $f(x) = \dots\dots\dots$
nous écrirons $f : x \mapsto \dots\dots\dots$

Méthode : Déterminer une image ou un antécédent par le calcul

- Pour déterminer l'image d'un nombre a , il suffit de remplacer x par a dans l'expression de $f(x)$ et de faire le calcul.
- Pour déterminer le ou les antécédents (s'ils existent) d'un nombre b , il faut essayer de résoudre l'équation $f(x) = b$.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dots\dots\dots$
L'image de $\dots\dots\dots$ par f est $\dots\dots\dots$
Déterminons les antécédents éventuels de $\dots\dots\dots$ par f
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Remarque : Il peut y avoir un, plusieurs ou même aucun antécédent, mais, qu'**UNE SEULE IMAGE**!

Définition 2 : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction f . Nous parlons aussi de domaine de définition de la fonction f . Il est souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Exemple 3 : La fonction f définie par $x \mapsto \frac{1}{2x+4}$ admet pour ensemble de définition : car :

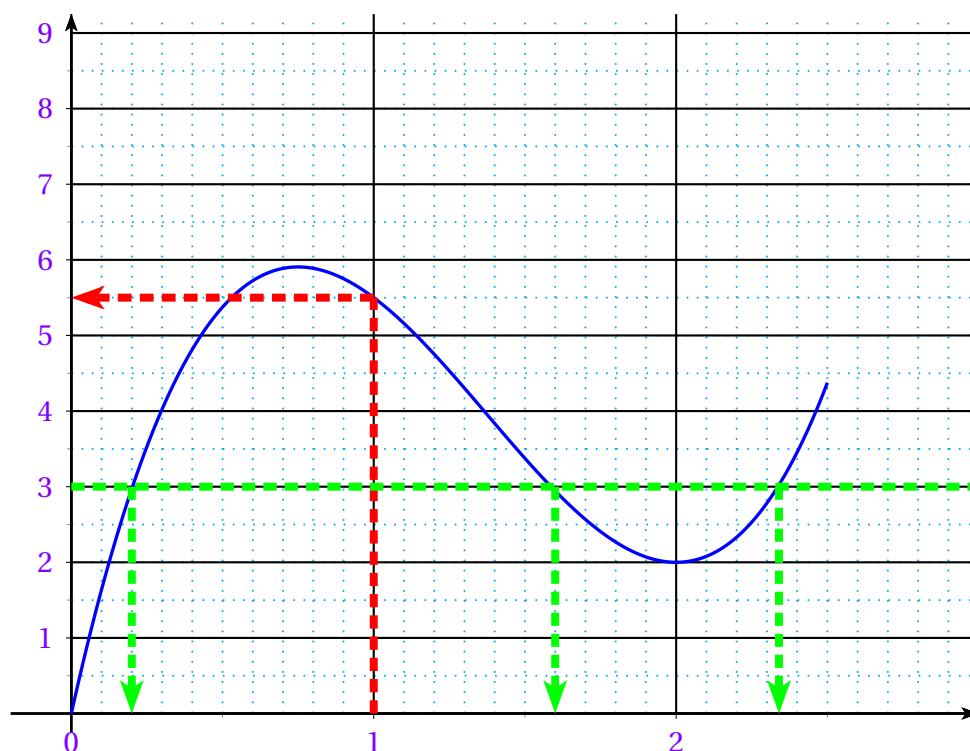
.....

Définition 3 : Dans le plan, muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nommons **courbe représentative** d'une fonction numérique f , l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ du plan, pour x parcourant l'ensemble de définition de f . Nous la notons souvent $\mathcal{C}_f$. Ainsi

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Remarque : Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents x sur l'axe des abscisses

Exemple 4 :



L'image de 1 est :

Les antécédents de 3 sont :

Méthode : détermination graphique de l'image de x par f

1. Nous plaçons x sur l'axe des abscisses.
2. Nous nous déplaçons verticalement jusqu'à rencontrer $\mathcal{C}_f$.
3. Nous lisons $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

Méthode : détermination graphique d'antécédents éventuels de y par f

1. Nous plaçons y sur l'axe des ordonnées.
2. Nous nous déplaçons horizontalement jusqu'à rencontrer $\mathcal{C}_f$.
3. Nous lisons les valeurs des antécédents éventuels sur l'axe des abscisses.

2 Propriétés particulières

2.1 Parité

Définition 4 :

1. f est dite **paire** lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
2. f est dite **impaire** lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction

1. Nous vérifions que l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à O . (Pour cela, nous nous contentons souvent de le constater en observant $\mathcal{D}_f$.)
2. Nous exprimons $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 5 : Sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$ est paire car

.....

.....

Sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire car

.....

.....

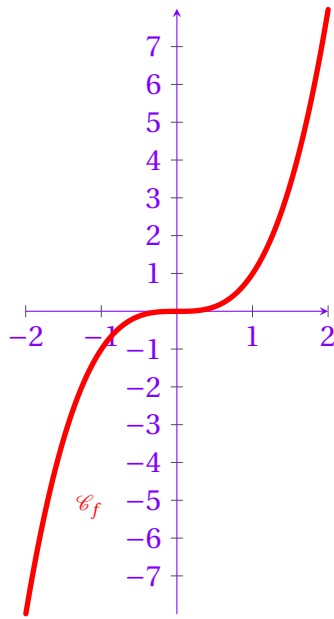
Remarque : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^n$ est paire si.....
et impaire si

Théorème 1 :

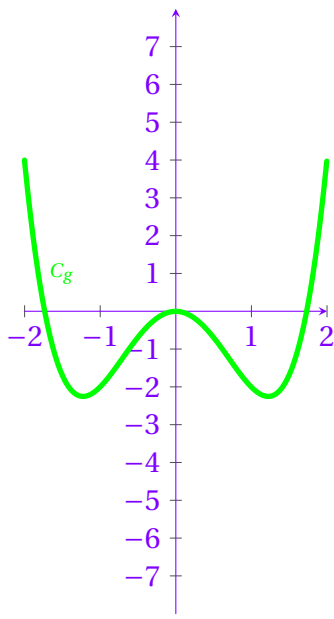
(Interprétation graphique)

1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple 6 :



Fonction impaire.



Fonction paire.

2.2 Monotonie

Définition 5 : Soit f une fonction réelle et soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

1. f est dite **constante** sur I lorsque : $\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, f(x) = k$.

2. f est dite **croissante** (resp. strictement croissante) sur I lorsque f conserve l'ordre (resp. l'ordre strict) sur I i.e. :

$$\forall (a, b) \in I^2, (a \leq b \implies f(a) \leq f(b)) \left(\text{resp. } \forall (a, b) \in I^2, (a < b \implies f(a) < f(b)) \right).$$

3. f est dite **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur I lorsque f inverse l'ordre (resp. l'ordre strict) sur I i.e. :

$$\forall (a, b) \in I^2, (a \leq b \implies f(a) \geq f(b)) \left(\text{resp. } \forall (a, b) \in I^2, (a < b \implies f(a) > f(b)) \right).$$

4. f est dite **monotone** (resp. strictement monotone) sur I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I (resp. strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I).

Exemple 7 :

2.3 Fonctions bornées

Définition 6 :

Soit f une fonction réelle

1. f est dite **majorée** lorsque : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \leq M$.
 M est alors appelé un **majorant** de f .
2. f est dite **minorée** lorsque : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq m$.
 m est alors appelé un **minorant** de f .
3. f est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques : Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située en dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).

La notion de majorant/minorant n'est pas unique. Si nous avons un majorant/minorant il y en a une infinité.

Exemple 8 : La fonction $x \mapsto x^2$ admet pour minorants et

Méthode : Montrer qu'une fonction est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une fonction est majorée ou minorée, il y a plusieurs possibilités :

- Lorsque la fonction f est définie sur un intervalle borné, nous pouvons partir du domaine de définition de $f : x \in \mathcal{D}_f$ puis nous essayons de reconstituer la fonction f en appliquant les opérations et fonctions élémentaires (en faisant bien attention au maintien ou non des inégalités, selon que la fonction appliquée est croissante ou décroissante).
- Si la question posée est « Montrer que $f(x) \leq M$. », nous pouvons étudier le signe de la différence $f(x) - M$ et montrer que $f(x) - M \leq 0$. Inversement, si la question posée est « Montrer que $f(x) \geq M$. », nous pouvons étudier le signe de la différence $f(x) - M$ et montrer que $f(x) - M \geq 0$.

Exemple 9 :

Soit f la fonction définie pour $x \in [0; 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Montrer que $\forall x \in [0; 1], 0 \leq f(x) \leq 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Soit f la fonction définie pour $x \in [0; 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

3 Fonctions usuelles

3.1 Fonction carrée

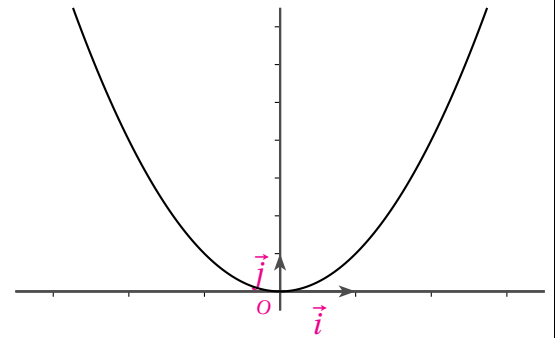
Définition 7 : La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Théorème 2 :

- La fonction carrée est paire.
- Nous avons

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	
	$+$	0	$+$

- La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthogonal est une parabole de sommet O .

**3.2 Fonction inverse**

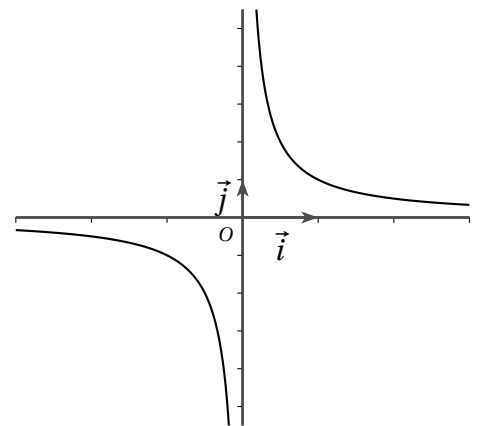
Définition 8 : La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Théorème 3 :

- La fonction inverse est impaire.
- Nous avons

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0
$\frac{1}{x}$		$-\infty$	
	$-$		$+$

- La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes du repère.

**3.3 Fonction racine carrée**

Définition 9 : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Nous appelons racine carrée de x , notée $\sqrt{x}$, l'unique réel $y \in \mathbb{R}_+$ tel que : $y^2 = x$.

Théorème 4 :

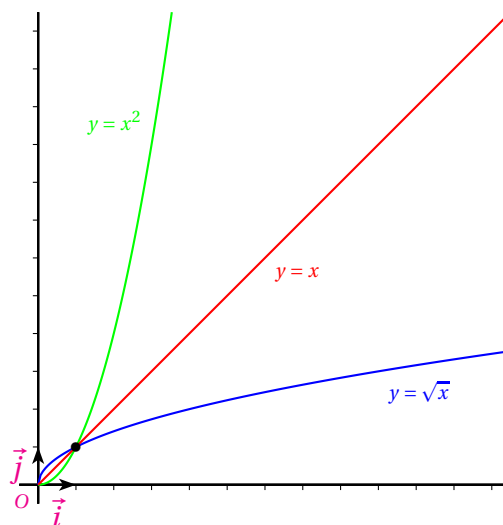
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{t^2} = |t|$.
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.
- $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Théorème 5 : Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Nous avons :

x	0	1	$+\infty$
f		1	$+\infty$
$f(x)$	0		+

- Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f est la symétrique de la demi-parabole d'équation $y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



Remarques : $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$ et $\sqrt{5} \approx 2,2$.

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire ni majorée mais minorée par 0.

3.4 Fonction valeur absolue

Définition 10 : Soit x un réel.

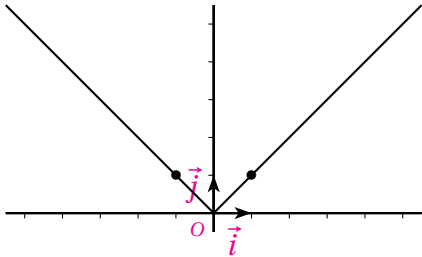
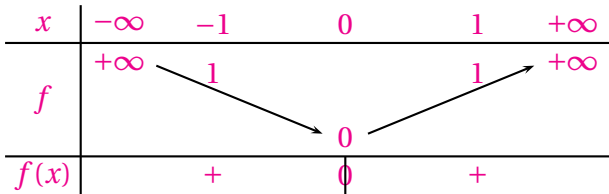
Nous appelons valeur absolue de x , notée $|x|$, le réel défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$.

Interprétation graphique : $\mathbb{R}$ est représenté par une droite muni d'un repère $(O; \vec{i})$ appelé axe réel.
À tout réel x correspond le point M_x d'abscisse x sur cet axe.
Nous avons : $|x| = d(0, x) = OM_x$ et $|y - x| = d(x, y) = M_x M_y$.

Proposition 6 : La fonction valeur absolue est paire et à valeurs positives.

Théorème 7 : Soit f la fonction valeur absolue.
Nous avons :



Définition 11 : Soient a et b deux réels.

- Nous appelons **distance entre a et b** la valeur $|b - a|$. Il s'agit d'un réel positif.
- Nous appelons **longueur de l'intervalle $[a, b]$** , (ou $[a, b[$ ou $]\dots$ la valeur $|b - a|$.

Exemple 10 :

Donner la distance entre les nombre 3 et 7.

.....

Donner la distance entre les nombre -3 et 7.

.....

Donner la longueur de l'intervalle $[7; 13]$.

.....

4 Opération sur les fonctions

Définition 12 :
Soient E et F deux ensembles alors :
 $E \cap F$) représente

Définition 13 : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

— **Addition** : La somme $f + g$ désigne la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g (f + g)(x) = \dots\dots\dots$$

— **Multiplication** : Le produit fg désigne la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g (fg)(x) = \dots\dots\dots$$

— **Division** : Le quotient $\frac{f}{g}$ désigne la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \dots\dots\dots$$

Exemple 11 :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Donner l'ensemble de définition de f .

.....

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{2x-3}$

Donner l'ensemble de définition de g .

.....

Définir et donner l'ensemble de définition de $f + g$.

.....

.....

Définir et donner l'ensemble de définition de fg .

.....

.....

Définir et donner l'ensemble de définition de $\frac{g}{f}$.

.....

.....

Définition 14 : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. La **composée de f suivie de g** , notée $g \circ f$, est définie pour les $x \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Ainsi $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$

Exemple 12 : Soient $f : x \mapsto 3x + 4$ et $g : x \mapsto x^2$. Donner l'ensemble de définition et l'expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

.....

.....

.....

.....

Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Donner l'ensemble de définition et l'expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

.....

.....

.....

.....

Méthode : Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

1. Fonctions usuelles

— Une fonction polynomiale est définie sur $\mathbb{R}$.

- Une fraction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent son dénominateur, appelées valeurs interdites. En pratique, nous résolvons l'équation « dénominateur = 0 ».
 - La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. **Fonctions quelconque** Nous commençons par déterminer la forme de l'expression (somme, produit, quotient, composée) :
- Pour une somme ou un produit : déterminer l'ensemble de définition de chacun des termes/facteurs et prendre l'intersection de ces ensembles.
 - Pour un quotient : prendre l'intersection des ensembles de définition respectifs du numérateur et du dénominateur puis retirer les valeurs qui annulent le dénominateur.
 - Pour une composée : déterminer l'ensemble de définition de la première fonction et exprimer la condition assurant que l'image de la première fonction soit dans l'ensemble de définition de la seconde fonction. En particulier, une composée de la forme $\sqrt{f}$ est définie lorsque f est définie ET que $f(x)$ est positif.

5 Fonction bijective

Définition 15 : Soient I et J deux intervalles. Nous disons qu'une fonction f est une bijection de I dans J ou que $f : I \rightarrow J$ est bijective si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$,
2. pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Nous pouvons alors définir une fonction appelée bijection réciproque ou fonction réciproque de f , que nous notons f^{-1} , définie sur J et à valeurs dans I , et qui, à un réel $y \in J$, associe l'unique solution $x \in I$ de l'équation $f(x) = y$.

$$\forall x \in I, \forall y \in J, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Exemple 13 :

La fonction définie que $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto x^2$ est-elle bijective?

.....

Comment s'appelle sa fonction réciproque?

Soit $g : x \mapsto 2x + 3$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est-elle bijective? Si oui donner sa fonction réciproque.

.....

.....

.....

.....