

Nom :

Devoir à la maison 1 de mathématiques de ECT1 à rendre le 12 octobre

Vous pouvez traiter qu'une partie du devoir. L'important n'est pas de recopier la copie d'un camarade ou la réponse de l'I.A. mais de comprendre comment il faut résoudre l'exercice. Je préfère un travail un peu maladroit qu'un travail qui n'est pas le votre.

Exercice 1 :Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $36x^2 + 7x - 4 = 0.$
- $x^2 - 2 = 0.$
- $x^2 + 7x \geq 0.$
- $x^2 - 10x - 11 \leq 0.$

Exercice 2 :

Une somme de 3 920 euros est partagée également entre plusieurs personnes. S'il y avait deux personnes de plus chaque part serait réduite de 224 euros. Combien y a-t-il de personnes?

Exercice 3 :**Partie A.**La fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 2]$ admet le tableau de variations suivant :

x	-6	-5	-4	$-\frac{7}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$f(x)$	26	~~X~~	0	-10	~~X~~	0	18

- Comparer si c'est possible $f(0)$ et $f(0,5)$; $f(0)$ et $f(-5)$; $f(-5,5)$ et $f(1,5)$.
- Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-6; 2]$.

Partie B.On considère la fonction f définie sur $[-6; 2]$ par

$$f(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2).$$

- Vérifier que $f(x) = 2x^2 + 7x - 4.$
- Factoriser $f(x).$
- Résoudre :
 - $f(x) = -4$
 - $f(x) > 0.$

on ne peut pas les comparer

$$f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(-5) > 0 > f(0)$$

Exercice 2 :

Une somme de 3 920 euros est partagée également entre plusieurs personnes. S'il y avait deux personnes de plus chaque part serait réduite de 224 euros. Combien y a-t-il de personnes?

P : nombre de personnes
A : argent reçu

$$\frac{3920}{P} = A$$

$$\text{et } \frac{3920}{P+2} = A-224$$

$$P > 0$$

$$\frac{3920}{P+2} = \frac{3920}{P} - 224$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{3920}{P+2} = \frac{3920 - 224P}{P}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 3920P &= (3920 - 224P)(P+2) \\ 3920P - (3920 - 224P)(P+2) &= 0 \\ 3920P - (3920P + 7840 - 224P^2 - 448P) &= 0 \\ \cancel{3920P} - \cancel{3920P} - 7840 + 224P^2 + 448P &= 0 \\ 224P^2 - 448P - 7840 &= 0 \\ 7 \cdot 32P^2 + 7 \cdot 32 \cdot 2P - 7 \cdot 32 \cdot 35 &= 0 \\ P^2 + 2P - 35 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 224 &= 2 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 32 \cdot 7 \\ 448 &= 2 \cdot 224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 32 \cdot 2 \cdot 7 \\ 7840 &= 10 \cdot 784 = 10 \cdot 2 \cdot 392 = 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 196 = 5 \cdot 2^4 \cdot 98 = 5 \cdot 2^5 \cdot 49 = 5 \cdot 2^5 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) = 4 + 140 = 144 = 12^2 \\ x_1 &= \frac{-b - \text{racine}(\Delta)}{2a} = \frac{-2 - 12}{2} = -7 \text{ solution impossible} \\ x_2 &= \frac{-2 + 12}{2} = 5 \end{aligned}$$

Il y a cinq personnes et elles reçoivent chacune $3920/5 = 784$ euros

Corrigé du devoir à la maison numéro 1 de mathématiques ECT1

Corrigé de l'exercice 1 :

1. Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 36 \times (-4) = 625 = 25^2$. Il y donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 25}{72} = -\frac{4}{9} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 25}{72} = \frac{1}{4}.$$

Donc l'équation a deux solutions $\boxed{-\frac{4}{9}}$ et $\boxed{\frac{1}{4}}$.

2. $x^2 - 2 = 0$ si et seulement si $x^2 = 2$ soit $\boxed{x = \sqrt{2}}$ ou $\boxed{x = -\sqrt{2}}$.
3. $x^2 + 7x = x(x + 7)$. Ce polynôme admet deux racines 0 et -7 . $x^2 + 7x$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines. On a donc $x^2 + 7x \geq 0$ si $\boxed{x \in]-\infty; -7] \cup [0; +\infty[}$.
4. Le discriminant de $x^2 - 10x - 11$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 144 = 12^2$. Il y donc deux racines

$$x_1 = \frac{10 - 12}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 12}{2} = 11.$$

Donc le polynôme a deux racines -1 et 11 . Il est du signe de a à l'extérieur de ses racines donc l'inéquation est vérifiée si $\boxed{x \in [-1; 11]}$.

Corrigé de l'exercice 2 :

Appelons x la somme partagée et n le nombre de personnes. Nous en déduisons le système :

$$\begin{cases} 3920 &= & xn \\ 3920 &= & (x - 224)(n + 2) \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième équation x par $\frac{3920}{n}$, nous en déduisons que $3920 = \left(\frac{3920}{n} - 224\right)(n + 2)$.
En mettant au même dénominateur et en faisant un produit en croix, on en déduit que

$$3920n = (3920 - 224n)(n + 2).$$

En développant et en simplifiant, on trouve que n est racine positive du polynôme $-224n^2 - 448n + 7840$.
Notons que sans calculatrice chercher les racines de ce polynôme peut-être épineux mais notons que :

$$-224n^2 - 448n + 7840 = 0 \iff -7 \times 32n^2 - 14 \times 32n + 245 \times 32 = 0 \iff -7n^2 - 2 \times 7n + 35 \times 7 = 0 \iff -n^2 - 2n + 35 = 0$$

Pour la factorisation par 2 et ses puissances c'est parce qu'on a des nombres paires, puis par la factorisation par 7 comme les deux premiers termes étaient divisibles par 7 il suffisait de vérifier que c'était aussi vrai pour le dernier terme.

Maintenant cherchons les solutions de $-n^2 - 2n + 35 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 + 4 \times 35 = 4 + 140 = 144 = 12^2$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 12}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 12}{-2} = -7$$

Les racines de ce polynôme sont -7 et 5 . Comme le nombre de personnes est positif, on en déduit que le nombre de personnes est $\boxed{5}$.

Corrigé de l'exercice 3 :

Partie A.

1. On a $\boxed{f(0) < f(0,5)}$, car sur l'intervalle $[-3, 5; 0, 5]$, la fonction f est strictement croissante.

On a $\boxed{f(-5) > f(0)}$, car sur l'intervalle $[-6; -4]$, le minimum de la fonction f est 0, donc $f(-5) \geq 0$ et sur l'intervalle $[-3, 5; 0, 5]$ le maximum de f est 0 donc $f(0) \leq 0$.

On ne peut pas comparer $f(-5, 5)$ et $f(1, 5)$ avec les renseignements qu'on nous donne.

2. Sur $[-6; -4]$, la fonction f est strictement décroissante. Son minimum est atteint pour $x = -4$ et il est nul. Donc f est positive sur $[-6; -4]$. La fonction f est strictement décroissante sur $[-4; -3,5]$. Son maximum est atteint pour $x = -4$ et il est nul. Donc f est négative sur cet intervalle. Avec le même genre d'arguments, on montre que f est négative sur $[-3,5; 0,5]$ et positive sur l'intervalle $[0,5; 2]$. Nous en déduisons le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-6; 2]$.

x	-6		-4		0,5		2			
$f(x)$	+		0		-		0		+	

Partie B.

1. On a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 8(x-0,5)^2 - 6(x-0,5)(x-2) \\
 &= 8(x^2 - x + 0,25) - 6(x^2 - 0,5x - 2x + 1) \\
 &= 8x^2 - 8x + 2 - 6x^2 + 15x - 6 \\
 &= \boxed{2x^2 + 7x - 4}.
 \end{aligned}$$

2. Factorisons $f(x)$. On a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 8(x-0,5)^2 - 6(x-0,5)(x-2) = (x-0,5)[8(x-0,5) - 6(x-2)] \\
 &= (x-0,5)(2x+8) = \boxed{2(x-0,5)(x+4)}.
 \end{aligned}$$

3. (a) On a $f(x) = -4$ si $2x^2 + 7x - 4 = -4$, d'où $0 = 2x^2 + 7x = x(2x + 7)$. Un produit de facteurs est nul si l'un de ces facteurs est nul, d'où $x = 0$ ou $2x + 7 = 0$ soit $x = -3,5$. Les solutions de l'équation sont $\boxed{x = 0}$ et $\boxed{x = -5}$.
- (b) On utilise la forme factorisée de f . Le coefficient devant le x (égale à 1) étant positif, on en déduit que f est positive à l'extérieur de ses racines donc sur $\boxed{x \in [-6; -4] \cup [0,5; 2]}$. Notons que f est définie que pour $x \in [-6; 2]$