

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

Montrer que la fonction f est majorée par 2. En déduire que f est bornée

On veut montrer
que $f(x) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x^2} - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2(1+x^2)}{1+x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{1+x^2} \leq 0 ?$$

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $] -1, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{3+2x^3}$$

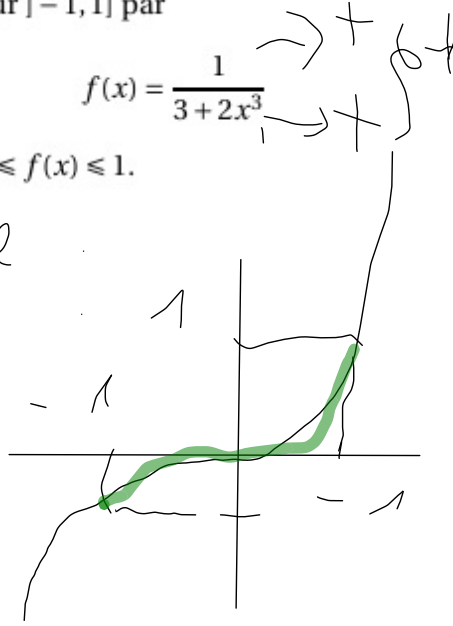
Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$ $0 \leq f(x) \leq 1$.

On veut montrer que

$$\underline{0 \leq f(x)}$$

$$x^3 \geq -1$$

$$\underline{3+2x^3 > 1}$$



Donc $f(x)$ est positive

Montrons que $f(x) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+2x^3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3+2x^3} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+2x^3} - \frac{(3+2x^3)}{3+2x^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3-2x^3}{3+2x^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^3-2}{3+2x^3} \leq 0$$

Or $\underline{x^3 \geq -1} \Leftrightarrow \text{sur } [-1, 1]$

$$-2x^3 \leq 2 \Leftrightarrow \underline{-2x^3-2 \leq 0}$$



$$\frac{-2}{1+x^2} \leq 0 ?$$
 donc toujours vrai
 $x^2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
-2	—	
$1+x^2$	+	
$f(x) - 2$	—	

$f(x) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 2$

	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2$		+
$1+x^2$		+
$f(x)$		+

Donc $f(x) \geq 0$

f est donc bornée par 0
et 1

Ex 665

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 18} = f(x)$$

Montrer que cette fonction est minorée par -1

$$f(x) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 2x + 18} + \frac{x^2 - 2x + 18}{x^2 - 2x + 18} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 19}{x^2 - 2x + 18} \geq 0$$

Etude du signe de $x^2 - 2x + 19$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 19 = -72$$

$$x^2 - 2x + 19 > 0 \text{ car } a = 1 > 0$$

Etude du signe de $x^2 - 2x + 18$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 18 = -68 < 0$$

$$x^2 - 2x + 18 > 0 \text{ car } a = 1 > 0$$

$$\text{Donc } f(x) + 1 \geq 0$$

$$\text{Donc } f(x) \geq -1 \text{ car } f \text{ est minorée par } -1$$

Exercice 10 : Déterminer le domaine de définition des fonctions définie ci-dessous :

1. $a(x) = \frac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$

les valeurs interdites de a sont solutions de $x^2 + 5x + 6 = 0$. C'est une équation polynômiale de degré 2.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = -2$$

$$\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$$

$$2. \quad b(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$$

b est définie si $x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 15 \times 1 = 64 - 60 = 4$$

Il y a 2 solutions

$$x_1 = \frac{8 - 2}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{8 + 2}{2} = 5$$

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$x^2 - 8x + 15$	+	$\emptyset$	$-\emptyset$	+

← Signe de $a = 1$

$$\mathcal{D}_b =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$$

$$3. \quad c(x) = \frac{x^2 - 10x + 11}{x^2 - 5x + 6}$$

On cherche les valeurs interdites. On résout

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

il y a 2 solutions

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$

$$\mathcal{D}_c = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$