Nom : .....

Devoir numéro 2 de mathématiques de ECT1 : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.Ce sujet comporte pages.Le sujet est volontairement trop long. Vous pouvez donc avoir une bonne note sans avoir tout traité!Dans le cas où vous repéreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement. Bon courage!

Exercice 1 : Posons $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que nous définissons ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs. Nous pourrons procéder par récurrence sur n en montrant que pour tout n non nul, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

Exercice 2 :

Écrire un programme `compliments` qui prend en argument la note d'un élève qui renvoie « félicitations ! » si l'élève a eu au moins de 16, qui renvoie « satisfaisant » si l'élève a au moins de 10, et qui renvoie « A revoir » si l'élève a eu strictement moins de 10

Exercice 3 :

Partie A

Soit P défini par

$$P(x) = -2x^3 - 7x^2 - 2x + 3.$$

1. Vérifier que $P(-1)$.
2. Factoriser $P(x)$ par $x+1$.
3. Résoudre $P(x) = 0$.
4. Donner le signe de P en fonction de x à l'aide d'un tableau de signes.

Partie B

Soit $Q(x) = x^2 - 12x + 11$ et

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-2x^3 - 7x^2 - 2x + 3}{x^2 - 12x + 11}$$

5. Résoudre $x^2 - 12x + 11 = 0$.
6. En déduire les valeurs interdites de R et donc l'ensemble de définition de $R : x \mapsto R(x)$.
7. Donner le tableau de signe de $R(x)$ en fonction de x.
8. Résoudre $R(x) \leqslant 0$.

Exercice 4 :

Soit R la fonction définie par :

$$R(x) = \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de R.
2. Montrer que pour tout x réel $R(x) \leqslant 4$.
3. Montrer que R admet pour minorant -9.
4. Justifier de R est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier la parité de R.

Exercice 5 :

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

1. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

Posons pour tout entier naturel n, $w_n = u_n - 6$.

(a) Calculer u_1 et u_2 puis w_0, w_1 et w_2. Conjecturer (émettre une hypothèse sans preuve) la nature de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Pour tout entier naturel n, calculer w_{n+1} en fonction de w_n. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

(c) Démontrer que pour tout entier n :

$$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

2. Considérons la suite (b_n) dont les termes vérifient, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$nb_n = (n+1)b_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 1$$

(a) Détailler le calcul permettant d'obtenir b_1, b_2, b_3 et b_4.

(b) Conjecturer une expression de (b_n).

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Calculer u_1.
2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Calculer w_0 puis écrire w_n en fonction de n.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n \neq 1$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + w_n}{1 - w_n}$.

Exercice 7 :

1. (a) Calculer (laisser sans évaluation toutes puissances de nombre supérieure ou égale à 5) : $\sum_{k=0}^{10} 5 \times 3^k$.

   (b) Compléter le programme Python suivant pour qu'il donne cette somme :

```
def somme():
    u=5
    S=0
    for i in range(....):
        S=...
        u=...
    return(...)
```

2. Calculer $\sum_{k=0}^{10} 5k+2$.

Exercice 8 :

Dans un quartier d'une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque trimestre.

Après observations, ils constatent que, chaque trimestre, 120 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 40% des chômeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.

Au début du premier trimestre 2017 (1er janvier 2017), le nombre de demandeurs d'emploi était de 500.

Notons u_n le nombre de demandeurs d'emploi au début du n-ième trimestre après le 1er janvier 2017. Ainsi $u_1 = 500$.

Dans tout l'exercice, les valeurs seront arrondies à l'unité.

1. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième et du troisième trimestre 2017.
2. Justifier que nous pouvons modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier $n \geqslant \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 0.6u_n + 120$.
3. Définissons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout entier $n \geqslant \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - 300$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
   (b) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant \mathbb{N}^*$, w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant \mathbb{N}^*$, nous avons $u_n = 200 \times 0.6^{n-1} + 300$.
4. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du quatrième trimestre 2018. Indication numérique : $0.6^7 \approx 0.03$.

Exercice 9 :

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

10 % des personnels sont des médecins et 70 % sont des soignants.

60 % des médecins sont des hommes et 90 % des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

1. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
2. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
3. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

Corrigé du devoir numéro 2 de mathématiques ECT1

Corrigé de l'exercice 1 :

1. Nous avons pour $n = 1$:

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{u_1}{2(1+1)u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{4\times\frac{1}{2}+1} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

et pour $n = 2$:

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{u_2}{2(2+1)u_2+1} = \frac{\frac{1}{6}}{6\times\frac{1}{6}+1} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $\mathscr{P}_n$: « $u_n > 0$ ».
Initialisation : Nous montrons $\mathscr{P}_0$.
$u_0 = \frac{1}{2} > 0$.
$\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et nous supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Nous avons donc $u_n > 0$ et nous voulons montrer : $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence, u_n est strictement positif. Comme $u_n > 0$, alors $2(n+1)u_n+1 > 1$ est non nul donc le quotient $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n+1}$ Comme numérateur et dénominateur sont strictement positifs, alors le quotient aussi. Donc u_{n+1} est strictement positif.
Ainsi $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, soit

$$\boxed{u_n > 0}.$$

Corrigé de l'exercice 2 :

Voici le programme demandé :

```
def compliments(note):
    if note>= 18:
        return("Félicitations !")
    elif note>=10:
        return("satisfaisant")
    else:
        return("A revoir")
```

Corrigé de l'exercice 3 : Partie A

Soit P défini par

$$P(x) = -2x^3 - 7x^2 - 2x + 3.$$

1. Nous avons :

$$P(-1) = -2\times(-1)^3 - 7\times(-1)^2 - 2\times(-1) + 3 = 2 - 7 + 2 + 3 = \boxed{0}.$$

2. Effectuons une division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & -2x^3 & - & 7x^2 & - & 2x & + & 3 & x+1 \\
- & -2x^3 & - & 2x^2 & & & & & \hline -2x^2-5x+3 \\
\hline
 & & - & 5x^2 & - & 2x & + & 3 & \\
- & & - & 5x^2 & - & 5x & & & \\
\hline
 & & & & & 3x & + & 3 & \\
- & & & & & 3x & + & 3 & \\
\hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc $\boxed{P(x) = (x+1)(-2x^2-5x+3)}$.

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc $P(x) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $-2x^2-5x+3 = 0$.
   L'équation $-2x^2-5x+3 = 0$ est un trinôme du second degré. Donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0.$$

   L'équation a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{5+7}{-4} = -3$$

   Nous avons donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-3, -1, \frac{1}{2}\right\}}$

4. Rappelons qu'un polynôme de degré 2 est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Ici $a = -2$, donc $-2x^2-5x+3$ est négatif sauf entre -3 et 0.5 Nous obtenons alors tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		0.5		$+\infty$
$-2x^2-5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

Soit $Q(x) = x^2 - 12x + 11$ et

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-2x^3-7x^2-2x+3}{x^2-12x+11}$$

5. L'équation $x^2-12x+11 = 0$ est un trinôme du second degré. Donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 11 = 144 + 44 = 100 > 0.$$

   L'équation a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-\sqrt{100}}{2\times 1} = \frac{12-10}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+\sqrt{100}}{2} = \frac{12+10}{2} = 11$$

   Nous avons donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{1\ ,\ 11\}}$

6. Les valeurs interdites de R sont 1 et 11 et donc l'ensemble de définition de $R : x \mapsto R(x)$ est $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\ ,\ 11\}}$.
7. Nous avons toujours en utilisant que le signe d'une polynôme de degré 2 est du signe de a à l'extérieur de ses racines :

x	$-\infty$		-3		-1		0.5		1		11		$+\infty$
$-2x^3-7x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2-12x+11$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$R(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$		$-$	

8. Nous avons d'après le tableau précédent : $\boxed{\mathscr{S} = [-3\ ,\ -1] \cup [0.5\ ,\ 1[\cup [0.5\ ,\ 1[\cup]11, +\infty[}$.

Corrigé de l'exercice 4 :

1. R est définie si son dénominateur est non nul. Or un carré est toujours positif, donc $x^2+1 > 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_R = \mathbb{R}}$
2. Nous avons :

$$R(x) \leqslant 4 \iff R(x) - 4 \leqslant 0$$

. Or :

$$R(x) - 4 = \frac{4x^2-9-4(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{4x^2-9-4x^2-4}{x^2+1} = \frac{-13}{x^2}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur négatif, donc $R(x) \leqslant 4$ pour tout x réel.

3. Nous avons :

$$R(x) \geqslant -9 \iff R(x) + 9 \geqslant 0.$$

Or

$$R(x) - 9 = \frac{4x^2-9+9(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{4x^2-9+9x^2+9)}{x^2+1} = \frac{13x^2}{x^2+1}$$

Ce quotient est un quotient de nombre positif car un carré est toujours positif donc $R(x)$ est bien minorée par -9.

4. R est bornée sur $\mathbb{R}$ car majorée par 4 et minorée par -9.
5. L'ensemble de définition de R est symétrique par rapport à 0 et :

$$R(-x) = \frac{4(-x)^2-9}{(-x)^2+1} = \frac{4x^2-9}{x^2+1} = R(x)$$

R est une fonction paire.

Corrigé de l'exercice 5 :

1. (a) Nous avons :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 1 = \frac{1}{3} \times 1 + 4 = \boxed{\frac{13}{3}}$$

et

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{13}{3} + 4 = \boxed{\frac{49}{9}}$$

Puis $\boxed{w_0 = -5}$, $\boxed{w_1 = \frac{13}{3} - 6 = -\frac{5}{3}}$ et $\boxed{w_2 = \frac{49}{9} - 6 = -\frac{5}{3^2}}$.

Il semblerait que la suite (w_n) soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -5, puisque $w_1 = \frac{1}{3}w_0$ et $w_2 = \frac{1}{3}w_1$.

(b) On a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2$$

Or $u_n = w_n + 6$ d'où $w_{n+1} = \frac{1}{3}(w_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}w_n + 2 - 2 = \frac{1}{3}w_n$

La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -5

(c) Comme la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -5, $w_n = w_0 q^n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Puis $\boxed{u_n = w_n + 5 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6}$.

2. (a) Nous avons : $\boxed{1 \times b_1 = 2 \times 1 + 1 = 3}$, puis

$2b_2 = 3 \times 3 + 1 = 10$ soit $\boxed{b_2 = 5}$.

$3b_3 = 4 \times 5 + 1 = 21$ soit $\boxed{b_3 = 7}$.

$4b_4 = 5 \times 7 + 1 = 36$ soit $\boxed{b_3 = 9}$.

(b) Au vue des premier termes il semblerait que $b_n = 2n + 1$.

Corrigé de l'exercice 6 :

1.

Nous avons :

$$u_1 = \frac{1 + 0.5u_0}{0.5 + u_0} = \frac{1 + 0.5 \times 2}{0.5 + 2} = \frac{2}{2.5} = \boxed{0.8}$$

2. (a) $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \dfrac{0,5 - 0,5u_n}{1,5 + 1,5u_n} = \dfrac{-0,5(u_n - 1)}{1,5(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3}w_n.$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

(b) On a $w_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.

On sait qu'alors pour tout naturel $\boxed{n,\ w_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

3. (a) Il s'agit de résoudre $w_n = 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$, soit $u_n + 1 = u_n - 1$ ou encore $1 = -1$ ce qui évidemment est impossible. Donc $w_n \neq 1$.

Une autre solution est de remarquer que $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$ si $n \geqslant 0$ et donc $w_n \leqslant \frac{1}{3} < 1$

(b) $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff w_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff w_n u_n + w_n = u_n - 1 \iff w_n u_n - u_n = -1 - w_n \iff u_n(w_n - 1) = -1 - w_n$ et comme $w_n \neq 1$,

$\boxed{u_n = \dfrac{-1 - w_n}{w_n - 1} = \dfrac{1 + w_n}{1 - w_n}}$.

Corrigé de l'exercice 7 :

1. (a) $\sum_{k=0}^{10} 5\times 3^k$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3. Donc :

$$\sum_{k=0}^{10} 5\times 3^k = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = 5\times\frac{1-3^{11}}{1-3} = \boxed{2.5-2.5\times 3^{11}}.$$

(b) Nous avons :

```
def somme():
    u=5
    S=0
    for i in range(11):
        S=S+u
        u=u*3
    return(S)
```

2. $\sum_{k=0}^{10} 5k+2$ est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Nous avons $u_0 = 5\times 0+2=2$ et $u_{10}=5\times 10+2=52$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{10} 5\times 5k+2 = \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes} = \frac{2+52}{2}\times 11 = 27\times 11 = \boxed{297}.$$

Donc :

Corrigé de l'exercice 8 :

1. Nous avons $u_2 = 0.6\times 500+120 = \boxed{420}$ et $u_3 = 0.6\times 420+120 = \boxed{372}$. Il y a donc 420 demandeurs d'emploi au début du deuxième semestre et 372 au début du troisième semestre.
2. Chaque semestre, le nombre de demandeurs d'emploi diminue de 40%. Autrement dit, il est multiplié par $1-0.4=0.6$. Par ailleurs, 120 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent. Nous avons donc bien donc bien pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1}=0.6u_n+120}$.
3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$w_{n+1} = u_{n+1}-300 = 0.6u_n+120-300 = 0.6(w_n+300)-180 = 0.6w_n+180-180 = 0.6w_n$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\boxed{0.6}$. Son premier terme est donné par :

$$w_1 = u_1-300 = 500-300 = \boxed{200}.$$

(b) Nous avons donc, pour tout entier n :

$$w_n = w_1\times q^{n-1} = \boxed{200\times(0.6)^{n-1}}$$

(c) Puisque, $u_n = w_n+300$, nous avons, d'après la question précédente, $\boxed{u_n = 200\times 0.6^{n-1}+300}$

4. Le nombre de demandeurs d'emploi au début du quatrième trimestre 2018 correspond à u_8. Nous avons :

$$u_8 = 200\times 0.6^7+300 \approx 306$$

Il y a donc $\boxed{306}$ demandeurs d'emploi au début du deuxième trimestre 2019.

Corrigé de l'exercice 9 :

L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes :
$\boxed{p(H)=0,1}$; $\boxed{p(S)=0,7}$: $\boxed{p_M(H)=0,6}$; $\boxed{p_S(F)=0,9}$.

1. $p(S)\neq 0$, donc $p_S(F)=\dfrac{p(S\cap F)}{p(S)} \iff p(S\cap F)=p_S(F)\times p(S)=0,7\times 0,9=\boxed{0,63}$.
2. De même $p(M\cap \mathrm{F})=p_M(F)\times p(M)=0,4\times 0,1=\boxed{0,04}$.
3. Les femmes sont 80 % et se répartissent en trois catégories : médecin, soignant, personnel administratif ou technique. Donc :
   $p(F)=0,80=p(F\cap M)+p(F\cap S)+p(F\cap AT)$
   $\iff p(F\cap AT)=p(F)-p(F\cap M)-p(F\cap S)=0,80-0,04-0,63=\boxed{0,13}$.
   Par définition $p_{AT}(F)=\dfrac{p(AT\cap F)}{p(AT)}$.
   On sait que $p(M)+p(S)+p(AT)=1 \iff p(AT)=1-p(M)-p(S)=1-0,1-0,7=0,2$.
   Donc $p_{AT}(F)\approx\dfrac{0,13}{0,2}\approx\boxed{0,65}$