Suites réelles

1 Généralités

Définition 1 : Appelons **suite réelle** toute application u de $[\![p\,;+\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$ où $p \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in [\![p\,;+\infty[\![$, l'image de n par u est notée u_n (lire « u indice n »et est appelée **terme de rang n de la suite u**.
La suite u est dite définie à partir du rang p.
Notons alors $u = (u_n)_{n\geqslant p}$: u_n est le terme général de la suite u.

Remarque : Bien qu'une suite u soit d'abord une fonction nous préférerons la notation u_n au lieu de $u(n)$ mais le sens est le même.

Exemple 1 : Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2+3$

$$\boxed{u_0 = 0^2+3=3} \quad \boxed{u_1 = 1^2+3=4} \quad \boxed{u_2 = 2^2+3=7}$$

Définition 2 : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie de deux façons différentes :

- **explicitement**, lorsque l'expression de son terme général un est donnée par une formule qui ne dépend que de n, auquel cas nous pouvons calculer directement n'importe quel terme de cette suite,
- **par une relation de récurrence**, lorsque nous donnons le premier terme de la suite et une formule (**la relation de récurrence**) qui permet de calculer un terme en fonction du précédent :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2 : Soit u la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$
La suite u est définie par récurrence :
La relation de récurrence est : $\boxed{u_{n+1} = 2u_n + 3}$
La fonction f de la définition ci-dessus est définie par $f(x) = 2x+3$
Nous avons :
$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times 5 + 3 = 13$
$u_2 = 2u_1 + 3 = 2\times 13 + 3 = 29$
$u_3 = 2u_2 + 3 = 2\times 29 + 3 = 41$

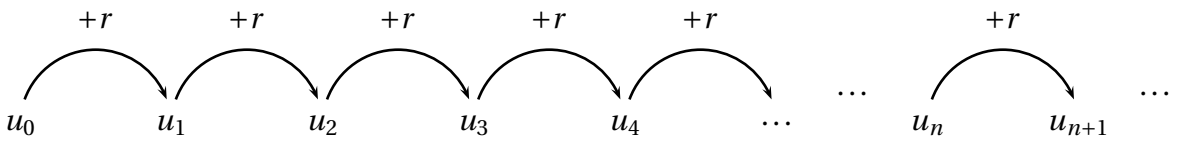
Remarque : Quand une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, le calcul d'un terme nécessite a priori le calcul successif de tous les termes précédents. Par exemple, pour calculer u_{100}, il est nécessaire de calculer les 100 termes précédents. Cela peut se révéler très fastidieux en pratique et nous essayons donc, lorsque c'est possible, de déterminer une formule explicite donnant directement le terme un en fonction de n.

2 Suites arithmétiques

Définition 3 : Une suite **arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée **raison** de la suite, au terme précédent.

Pour tout entier n,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r} \iff u_{n+1} - u_n = r.$$



Exemple 3 :

Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont arithmétiques. Si oui en donner la raison.

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Nous déposons chaque année 10 euros. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.
   La suite est arithmétique de raison 10.
2. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Nous dépensons chaque année 7 euros. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.
   La suite est arithmétique de raison -7.

Méthode : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, nous montrons que la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est une constante qui ne dépend pas de n (il s'agit de la raison r).

Exemple 4 :

Soit u la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n+1$. Nous avons :

$$u_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+2+1 = 2n+3 \text{ D'où}$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n+3-(2n+1) = 2n+3-2n-1 = 2$$

Donc la suite u est arithmétique de raison $\boxed{2}$.

Soit w la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = n^2+1$. Nous avons :

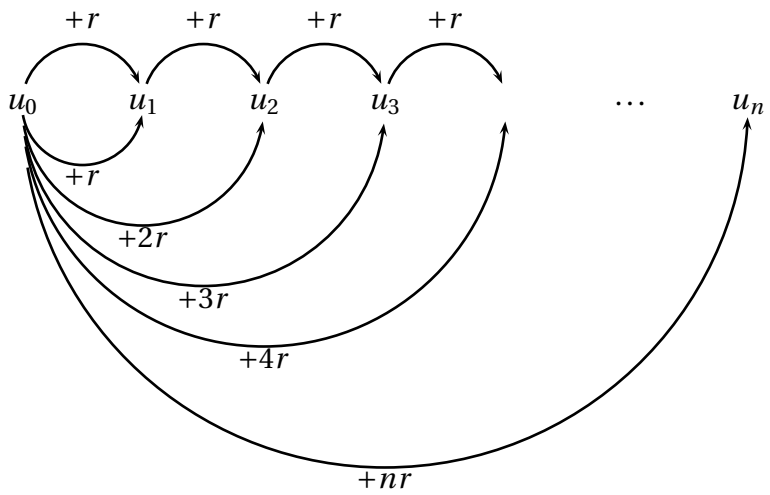
$$w_{n+1} = (n+1)^2+1 = n^2+2n+1+1 = n^2+2n+2$$
$$w_{n+1} - w_n = n^2+2n+2-(n^2+1) = n^2+2n+2-n^2-1 = 2n+1$$

Donc la suite w n'est pas arithmétique car nous ne trouvons pas un nombre indépendant de n.

Proposition 1 : (*expression explicite*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$



Remarque : Pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$, l'expression devient :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = u_1 + (n-1)r,$$

et plus généralement,

$$\forall p \geqslant,\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = u_p + (n-p)r,$$

Exemple 5 :

— Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Nous déposons chaque année 10 euros. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n. Rappelons que la raison est 10. Alors

$$\boxed{u_n = u_0 + r\,n = 100 + 10n}$$

et le montant sur le compte au bout de 10 ans est donné par

$$\boxed{u_{10} = 100 + 10 \times 10 = 200}$$

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_4 = -7$.
Nous avons :

$$u_n = u_4 + r(n-4) = -7 + 5(n-4) = -7 + 5n - 20 = \boxed{5n - 27}$$

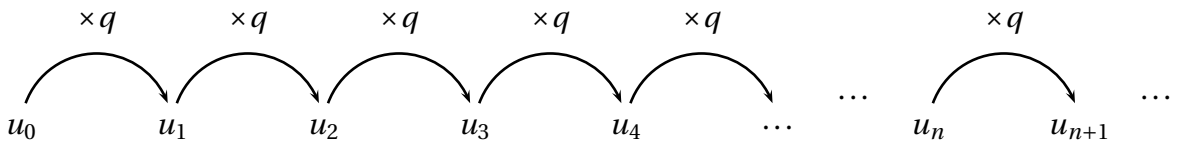
Donc

$$\boxed{u_0 = 5 \times 0 - 27 = -27} \text{ et } \boxed{u_{10} = 5 \times 10 - 27 = 23}.$$

3 Suites géométriques

Définition 4 : Une suite **géométrique** est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant la même quantité q, appelée **raison** de la suite, au terme précédent.
Pour tout entier n,

$$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$$



Exemple 6 :
Déterminer si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont géométriques. Si oui en donner la raison.

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Il rapporte chaque année 3% d'intérêts. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\boxed{1+\frac{3}{100}=1,03}$
2. Les réserves de pétrole en Alberta diminuent chaque année de 10% et les réserves initiales étaient de 10^{11}L. Soit u_n le nombre de litres lors de l'année n.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\boxed{1-\frac{10}{100}=0,9}$

Méthode : raison d'une suite géométriques

- Une augmentation de t% induit une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$ (coefficient multiplicateur d'une augmentation).
- Une diminution de t% induit une suite géométrique de raison $1-\frac{t}{100}$ (coefficient multiplicateur d'une diminution).
- Pour trouver la raison d'une suite géométrique il faut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Si nous trouvons le produit d'un nombre par u_n la suite est géométrique sinon elle ne l'est pas.

Exemple 7 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 3\times 2^n$. Nous avons

$$u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} = 3\times 2^n \times 2 = u_n 2 = 2u_n$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = n^2+1$. Nous avons

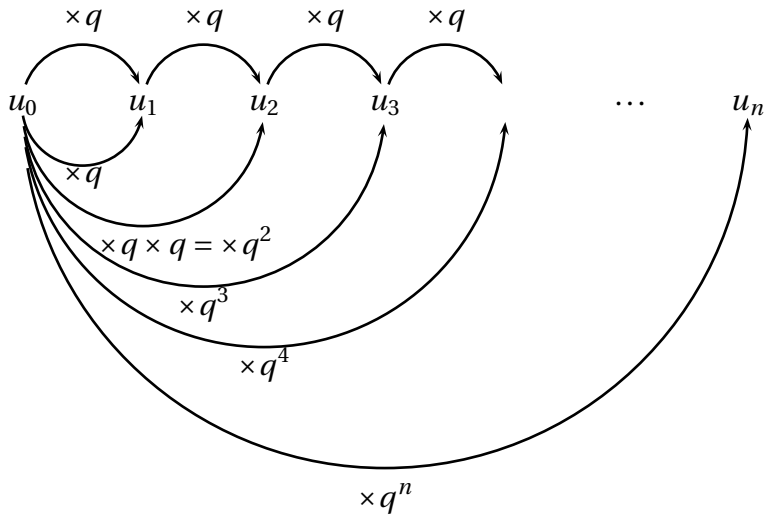
$$w_0 = 1 \text{ et } w_1 = 2 \text{ et } w_2 = 5.$$

Donc $\frac{w_1}{w_0} = 2$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Ce qui signifie que :
$\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$, donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique

Proposition 2 : (*expression explicite*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 q^n.$$



Remarque : Pour des suites dont l'indice débute à $n = 1$, l'expression devient :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = u_1 q^{n-1},$$

et plus généralement,

$$\forall p \geqslant,\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = u_p q^{n-p},$$

Exemple 8 :

— Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. Il rapporte chaque année 3% d'intérêts. Soit u_n le montant sur le compte à l'année n Alors

$$\boxed{u_n = u_0 q^n = 100 \times 1.03^n}$$

et le montant sur le compte au bout de 10 ans est donné par

$$\boxed{u_{10} = 100 \times 1.03^{10}}.$$

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1\,024$. Calculer u_{10}
Nous avons :

$$\boxed{u_n = u_0 q^n = 1\,024 \times 0.5^n}$$

et $\boxed{u_{10} = 1\,024 \times 0.5^{10} = 1}$.

4 Suites arithmético-géométriques

Définition 5 : Une suite u est dite **arithmético-géométrique** lorsque :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarques :

1. Si $u_1 = u_0$, alors u est constante, sinon il y a unicité du couple (a,b).
2. Si $a = 1$, alors u est arithmétique de raison b car $u_{n+1} - u_n = b$
3. Si $b = 0$, alors u est géométrique de raison a car $u_{n+1} = au_n$

Exemple 9 : Nous voulons placer 100 euros sur un compte rémunéré à 5%. Chaque année, la banque réclame 3 euros de frais. Notons u_n le montant sur le compte au bout de n années.
Nous avons $u_0 = 100$
$u_{n+1} = 1,05u_n - 3$.
La suite u est arithmético-géométrique avec $a = 1,05$ et $b = -3$

Méthode : **Détermination de l'écriture explicite d'une suite arithmético-géométrique quand $a \neq 1$.**

1. Nous cherchons une suite constante égale à c qui vérifie la même relation de récurrence que u.
2. Nous montrons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour n entier par $w_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.
3. Nous avons : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![p\,;\, +\infty [\![, u_n - c = (u_p - c)a^{n-p}$.

Exemple 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Exprimons u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Résolvons

$$c = 3c - 8 \iff -2c = -8 \iff c = \frac{-8}{-2} = 4$$

Soit w la suite définie par $w_n = u_n - c = u_n - 4$
Nous avons :
$w_{n+1} = u_{n+1} - c = 3u_n - 8 - 4$
Or $u_n = w_n + c = w_n + 4$, donc

$$w_{n+1} = 3(w_n + 4) - 8 - 4 = 3w_n + 12 - 12 = 3w_n$$

Nous avons bien $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 3
Donc

$$u_n - 4 = w_n = w_0 \times q^n = (u_0 - 4) \times 3^n = (2-4) \times 3^n = -2 \times 3^n$$

Donc pour tout n entier : $\boxed{u_n = w_n + 4 = -2 \times 3^n + 4}$.

5 Sommes des termes d'une suites

5.1 Notation $\sum$

Notations :
Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. Nous noterons :
$\sum_{k=p}^{n} u_k$ la somme des termes consécutifs de u_p à u_n c'est-à-dire :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$$

Exemple 11 :

— Soit u la suite définie par $u_n = 2n+3$.
Nous avons :
$u_0 = 3$, $u_1 = 2+3 = 5$, $u_2 = 2\times 2+3 = 7$, $u_3 = 2\times 6+3 = 9$, $u_4 = 2\times 4+3 = 11$ et $u_5 = 2\times 5+3 = 13$
Donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{5} u_k = 3+5+7+9+11+13 = 48}$

— Calculons : $\sum_{k=2}^{4} k^2 = 2^2+3^2+4^2 = \boxed{29}$.

Remarques :

— L'avantage de cette notation est de supprimer les points de suspension. Certes, il faut un peu de temps pour maîtriser cette nouvelle notation, mais une fois maîtrisée, elle s'avère bien plus pratique et plus rigoureuse que la notation avec les points de suspension.

— Nous pouvons choisir en indice la lettre que nous voulons. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2 = \sum_{n=1}^{100} n^2 = 1^2+2^2+\cdots+100^2.$$

Proposition 3 : *(linéarité du symbole $\sum$)*

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et λ un réel.

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ m\leqslant n,\ \sum_{k=m}^{n}(\lambda u_k) = \lambda\sum_{k=m}^{n} u_k$$

et

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ m\leqslant n,\ \sum_{k=m}^{n}(u_k+w_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} w_k.$$

5.2 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème 4 : Pour n, p, q entiers avec $p \leqslant q$:

$$\sum_{k=p}^{q} 1 = q - p + 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple 12 :

Calculer à la main :

$\sum_{k=3}^{8} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$

Calculer en utilisant la formule :

$$\sum_{k=3}^{8} k = 8 - 3 + 1 = 6.$$

Calculer à la main :

$$\sum_{k=0}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7 = 28.$$

Calculer en utilisant la formule :

$$\sum_{k=0}^{7} k = \frac{0+7}{2} \times 8 = 28.$$

Proposition 5 : (Somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et soient p et q deux entiers tels que $p \leqslant q$ La somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est :

$$\sum_{k=p}^{q} (u_k) = \frac{\text{Premier terme } + \text{ Dernier terme}}{2} \times \text{Nombre de termes}$$

Exemple 13 : Calculons $S = 1+4+7+10+\cdots+58+61+64$

D'abord repérons la suite arithmétique de raison $r = 3$ et $u_0 = 1$.

Nous avons alors $u_n = 1+3n$.

Déterminons n tel que $u_n = 64$. Nous résolvons :

$$1+3n = 64 \iff 3n = 63 \iff n = \frac{63}{3} = 21$$

Dans cette somme le premier terme est 1

Dans cette somme le dernier terme est 64

Dans cette somme le nombre de termes est $21+1 = 22$

Donc $S = \sum_{k=0}^{21} u_n = \frac{1+64}{2} \times 22 = 65 \times 11 = 715.$

5.3 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Proposition 6 :

La somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exemple 14 :

Calculer à la main :

$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 126$

Calculer en utilisant la formule :

$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{1-64}{-1} = \boxed{63}$

Proposition 7 : (*Somme des termes d'une suite géométrique*)

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$S = \text{Premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple 15 : Calculons (simplifier au maximum mais ne pas calculer les puissances...) :

$$\sum_{k=0}^{11} 5\left(\frac{2}{3}\right)^k = 5 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{1-\frac{2}{3}} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\frac{1}{3}} = \boxed{15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)}.$$