Chapitre 4 : exercices de suites

Exercice 1 :

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1$ et $w_1 = 5$ et $w_{n+1} = w_n + \dfrac{2}{n}$

1. Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.
2. Déterminer u_{n+2} et $u_n + 2$ en fonction de u_n.
3. Déterminer w_{n+2} et $w_n + 2$ en fonction de w_n.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

Exercice 3 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Déterminer u_{14}.
2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telles que $w_{36} = 86$ et la raison est $r = 2$. Déterminer u_0.
3. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telles que $t_2 = 2$ et $t_{15} = 67$. Donner la raison r et t_0.

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

Exercice 5 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 8$. Calculer u_7.
2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et $w_4 = 7$. Calculer w_1.
3. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique tel que $t_2 = 4$ et $t_4 = \dfrac{16}{9}$. Déterminer la raison q (Nous supposerons $q > 0$)

Exercice 6 :

On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2020, la production a été de 25 000 unités.

1. On note $P_0 = 25\,000$ et P_n la production au cours de l'année 2020+n. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2025.
   Indication numérique : $0.96^5 \approx 0.82$

Exercice 7 : On place un capital $u_0 = 3\,500$ euros à 3% par an avec intérêts composés. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans. Indication numérique : $1.03^{10} \approx 1.34$.

Exercice 8 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n + 1$.
   (a) Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3.
   (b) Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (c) Donner l'expression de w_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5u_n + 12$

1. Résoudre $c = 5c + 12$
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Donner l'expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Faire le même exercice avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = -4u_n + 10$ et $u_0 = 3$.

Exercice 10 : Exprimer à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\,024}$
3. $S_3 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$
4. $S_4 = 12 + 22 + 32 + \cdots + 132 + 142$

Exercice 11 : Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole $\sum$, en faisant disparaître ce symbole.

$$T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} \text{ et } T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}.$$

Exercice 12 :

1. Calculer la somme
$$S = -2 + 2 + 6 + 10 + \cdots + 98 + 102 + 106.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Calculer $T = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

Exercice 13 : Calculer les sommes S et T .

$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 118\,098$$

et

$$T = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{59\,049}$$

Exercice 14 : Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21 000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans. On note s_n le salaire annuel pour l'année n. On a donc $s_1 = 21\,000$.

1. Calculer s_1 et s_2.
2. Donner la nature de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et exprimer s_n en fonction de n.
3. Justifier que : $\sum_{k=1}^{5} s_k \approx 115\,500$
   Indication numérique : $1.04^5 \approx 1.22$.
4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.
   Indication numérique : $1.04^{20} \approx 2.19$.