CHAPITRE I

Calculs numériques et algébriques
Cours

Objectifs du chapitre

Connaitre les différents ensembles de nombres.

Effectuer des calculs de tête sur les fractions.

Effectuer des calculs de tête sur les puissances.

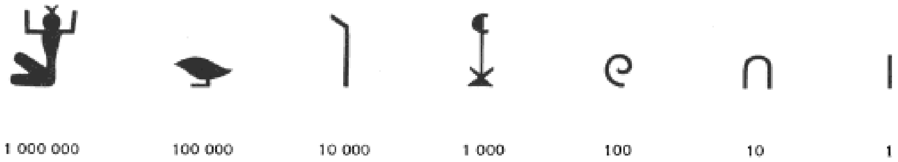
Effectuer des calculs de tête sur les racines carrées.

Développer, factoriser et simplifier des expressions.

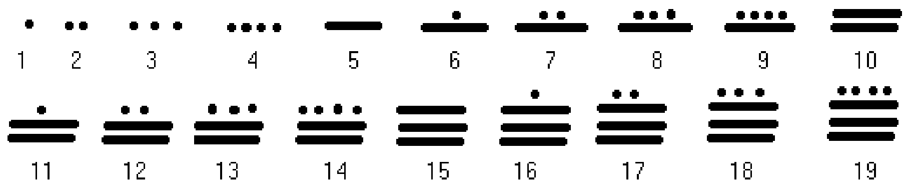
1 Un peu d'histoire

Dans ce paragraphe, on allons revenir un peu sur l'apparition, l'utilisation et les modifications des chiffres et des nombres dans l'histoire.
Les nombres sont apparus aux environs de 30000 avant J.C. Avant, l'Homme était incapable de compter, tout juste était-il capable de concevoir l'unité et la multitude. Ensuite, par nécessité de compter diverses choses (bêtes, objet...) l'Homme utilisa en premier lieu les doigts de la main. L'utilisation des phalanges et des articulations des doigts va plus loin que le simple procédé connu de tous : les Égyptiens, les Romains, les Arabes et les Perses étaient capables de compter jusqu'à 9999 selon une manière semblable aux langages des sourds et muets et par un système encore plus ingénieux, les Chinois arrivaient à compter jusqu'à 100 000 sur une main et 10 000 000 000 sur les deux mains.
Le système du tas de cailloux (environ 8000 avant J.C.) est à l'origine des bouliers chinois encore utilisés de nos jours. Il est aussi à l'origine de la première numérotation écrite de l'histoire. L'idée est très simple, chaque caillou représentait un des objets à compter. Vers 4000 avant J.C., dans ce qui est aujourd'hui l'Iran, les cailloux furent remplacés par des objets de différentes tailles et de formes conventionnelles : la baton pour l'unité, une bille plate pour les dizaines, une petite boule pour les centaines... Puis vers 3600 avant J.C., l'Homme eut l'idée de symboliser les nombres sur de l'argile, par exemple par un trait verticale pour le chiffre "1" : les chiffres sont nés.
Après cela, les différents peuples ont écrit les chiffres au moyen des lettres de leur alphabet :

- Les chiffres égyptiens : En Égypte, vers 3500 avant J.C., la notation des chiffres était basée comme l'écriture sur les hiéroglyphes. Chaque signe possédait une valeur définie : une barre verticale pour "1", une anse pour "10"...



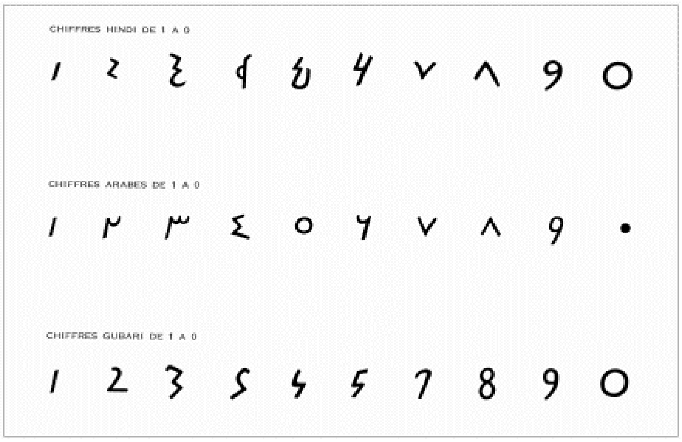
- Les chiffres mayas : Au troisième millénaire avant notre ère, les mayas utilisaient les nombres pour calculer le temps : ce sont eux qui inventèrent le calendrier. Il existait une autre série de symboles étonnamment simples, constitués de traits et de points : un point pour "1", deux points pour "2",..., un trait pour "5"... jusqu'à 19. Pour les nombres plus grands que 19, on juxtaposait plusieurs symboles : les mayas comptaient en base 20.



- Les chiffres hébreux : Les chiffres hébreux sont issus des lettres de l'alphabet hébreux. Il comporte 22 lettres qui permettaient de compter jusqu'à 400. Les valeurs au dessus de 400 étaient représentées par une reproduction légèrement modifiée de certains symboles.
- Les chiffres romains : Les romains employèrent une technique analogue pour représenter leurs nombres. Le chiffre "1" est représenté par I, "2" par II..., "5" par V... Ils ajoutèrent quelques "complications" à leur système avec la règle que tout signe placé à gauche d'un chiffre de valeur supérieure s'en retranche : "4" est représenté par IV et non par IIII.

I	II	III	IV	V	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	10	50	100	500	1000

- Les chiffres arabes : Ce sont ces chiffres qui sont à l'origne des chiffres utilisés maintenant. Ils ont en fait été inventés en Indes puis adaptés par la civilisation musulmane à partir du IX^{e} siècle. Ils ont ensuite été transmis peu à peu en Occident médiéval où ils ont mis plusieurs siècles à s'imposer. Il faut néanmoins faire une distinction entre les chiffres arabes occidentaux, dits **ghubâr**, qui sont à l'origine de nos chiffres actuels et les chiffres orientaux, dits **hindis**, tirés directement des chiffres indiens.

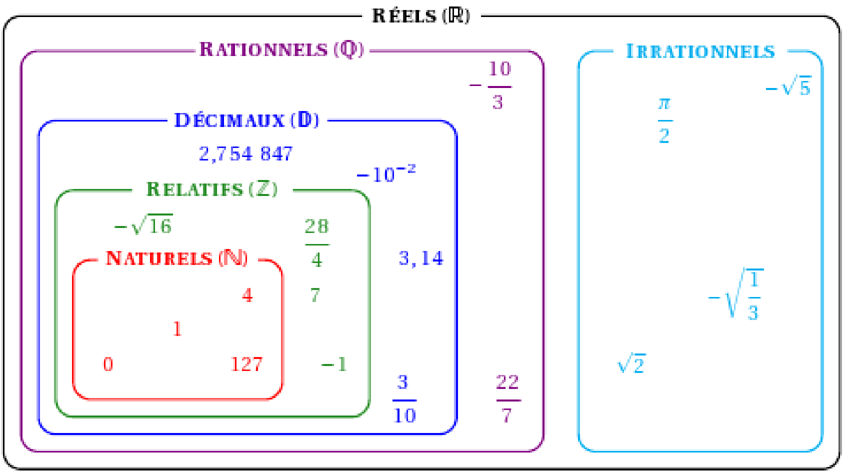


La forme des chiffres changea encore quelque peu et c'est l'avènement de l'imprimerie vers 1450 qui fixa la forme des chiffres qu'on connait aujourd'hui.

Ce n'est que vers le XIX^{e} siècle que les mathématiciens ont commencé à étudier les nombres non plus individuellement mais par groupes; c'est ainsi que sont nés les **ensembles de nombres**. On regroupe les nombres ayant des caractéristiques en commun.

- Les entiers naturels : C'est l'ensemble des entiers supérieurs ou égal à 0; autrement dit, ce sont les nombres dont on a parlé juste avant. C'est **Péano** (1858-1932), un mathématicien italien qui a défini cet ensemble, noté $\mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ comme *naturale* en italien). On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2\dots\}$.
- Les entiers relatifs : C'est l'ensemble de tous les nombres entiers, positifs et négatifs. Il fut défini par **Dedekind** (1831-1916), un mathématicien allemand. On note cet ensemble $\mathbb{Z}$. ($\mathbb{Z}$ vient de *zahl* qui signifie nombre en allemand). On a $\mathbb{Z} = \{\cdots -2; -1; 0; 1; 2\dots\}$.
- Les nombres rationnels : C'est l'ensemble des fractions. C'est encore Péano qui a défini cet ensemble, noté $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ pour *quotiente* en italien). Par exemple, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Les nombres réels : C'est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez. Par exemple, $\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi \in \mathbb{R}$.

On peut voir ces ensembles de manière symbolique comme étant de plus en plus grands; on peut représenter cela par le dessin ci-dessous :



2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Dans la suite, on va s'intéresser à certaines parties de $\mathbb{R}$ qu'on appelle les **intervalles**.

Définition

Si a et b sont deux nombres tels que $a < b$, alors l'**intervalle** défini par a et b est l'ensemble des nombres compris entre a et b. Se présentent alors plusieurs cas de figure :

Vocabulaire et Notations :

- l'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble des nombres compris au sens large entre a et b; autrement dit, $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$,
- l'intervalle $]a;b[$ est l'ensemble des nombres compris au sens strict entre a et b; autrement dit, $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,
- l'intervalle $[a;b[$ est l'ensemble des nombres compris entre a au sens large et b au sens strict; autrement dit, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
- l'intervalle $]a;b]$ est l'ensemble des nombres compris entre a au sens strict et b au sens large; autrement dit, $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.

On considère également deux **symboles** supplémentaires $+\infty$, **plus l'infini** et $-\infty$, **moins l'infini** qui permettent de définir d'autres intervalles :

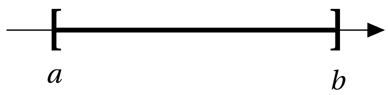
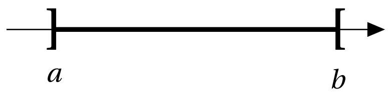
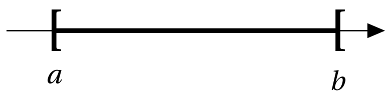
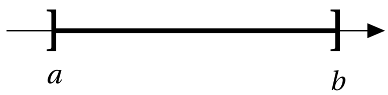
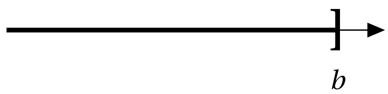
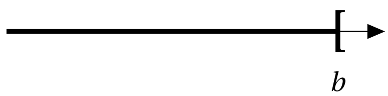
- l'intervalle $[a;+\infty[$ est l'ensemble des nombres supérieurs au sens large à a; autrement dit, $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$,
- l'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble des nombres inférieurs au sens large à b; autrement dit $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.
- On définit de la même façon, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;b[$.

Remarques importantes !!

- Le sens dans lequel est tourné le crochet indique si on prend ou pas le nombre derrière ce crochet ; si le crochet est **ouvert**, on ne prend pas le nombre mais s'il est **fermé**, on le garde dans l'intervalle. Par exemple, dans l'intervalle $[a;b[$, le crochet est ouvert en b mais fermé en a donc on garde a mais on enlève b : $[a;b[=\{x\in\mathbb{R}, a\leq x<b\}$.

- Il faut faire attention que $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels, donc du côté de $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. En particulier, on a $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

Si on représente les nombres réels sur une droite orientée, on obtient les cas suivants :

Notations	Graphiquement	Description
$[a;b]$		$\{x\in\mathbb{R}, a\leq x\leq b\}$
$]a;b[$		$\{x\in\mathbb{R}, a< x< b\}$
$[a;b[$		$\{x\in\mathbb{R}, a\leq x< b\}$
$]a;b]$		$\{x\in\mathbb{R}, a< x\leq b\}$
$]-\infty;b]$		$\{x\in\mathbb{R}, x\leq b\}$
$]-\infty;b[$		$\{x\in\mathbb{R}, x< b\}$
$[a;+\infty[$		$\{x\in\mathbb{R}, x\geq a\}$
$]a;+\infty[$		$\{x\in\mathbb{R}, x> a\}$

3 Calcul numérique

3.1 Avec des fractions

Quelques remarques afin de rafraîchir les mémoires.

Propriété

Soit a, b, c et d quatre nombres réels, tels que b et d sont non nuls :

i) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$,

ii) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times d+b\times c}{b\times d}$,

iii) $\dfrac{a\times c}{b}=a\times\dfrac{c}{b}=c\times\dfrac{a}{b}=a\times c\times\dfrac{1}{b}$,

iv) $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$,

v) $\dfrac{0}{b}=0$,

vi) $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$,

vii) Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse : $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$,

viii) On obtient l'inverse d'une fraction en permutant numérateur et dénominateur : pour a et b non nul, on a $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$,

ix) Finalement, pour a non nul, $\dfrac{c}{\frac{a}{b}}=c\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{b\times c}{a}$.

Exercice 1

Effectuer les calculs suivants :

i) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$,

ii) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{4}$,

iii) $2\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}$,

iv) $\dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

3.2 Avec des puissances entières

On va rappeler les différentes propriétés des puissances :

Propriété (Question de cours)

Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ deux entiers et $a, b \in \mathbb{R}^*$, deux réels non nuls, on a

i) $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$,

ii) $a^n \times a^m = a^{n+m}$,

iii) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$,

iv) $\left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$,

v) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

vi) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,

vii) $a^0 = 1$,

viii) $0^0 = 1$.

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants :

i) 2^3,

ii) $2^2 \times 2^3$,

iii) $\left(3^2\right)^2$,

iv) 5^{-2},

v) $\dfrac{5^2 \times 2^3}{2^2 \times 5}$,

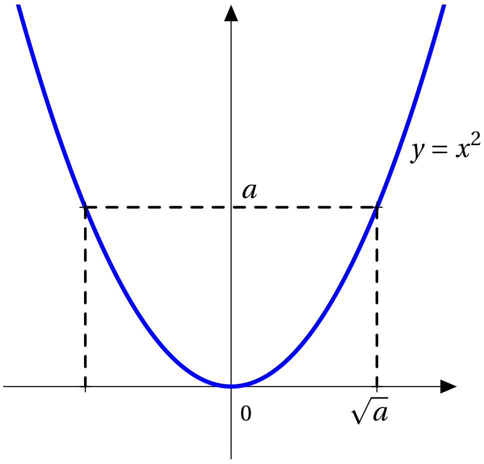
vi) $(-2)^3$.

3.3 Avec des racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif. $\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif qui, élevé au carré vaut a i.e.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$



Propriété

Soit a et b deux nombres positifs. On a

i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$,

ii) si $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Remarques importantes !!

⚠ En revanche, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$. ⚠

Exercice 3

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

i) $\sqrt{4}$,

ii) $\sqrt{9}$,

iii) $\sqrt{75}$,

iv) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{27}$,

v) $\dfrac{\sqrt{48} \times \sqrt{20} \times \sqrt{18}}{\sqrt{27} \times \sqrt{28} \times \sqrt{50}}$,

vi) $\sqrt{\dfrac{180}{270}}$,

vii) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

4 Développer, factoriser

4.1 Développer

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

Développer les expressions suivantes :

i) $2(2x+1)$,

ii) $2x(x-1)$,

iii) $(x-2)(2x-1)$,

iv) $(x^2+1)(3x^2-2x+1)$.

4.2 Factoriser

Exercice 5 (Exercice de khôlle)

Factoriser puis trouver le signe des expressions suivantes :

i) $2x - x(x+1)$,

ii) $2x - x^2 + x(x-1)$,

iii) $x - 1 + (2x+3)(x-1)$.

4.3 Identités remarquables

Exercice 6 (Question de cours)

Soit a et b deux nombres réels.
Rappeler les identités remarquables :

i) $(a+b)^2 = \dots$

ii) $(a-b)^2 = \dots$

iii) $(a+b)(a-b) = \dots$

Remarques importantes !!

On peut se servir de ces identités aussi bien pour développer que pour factoriser une expression.