CHAPITRE V

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS
COURS

Objectifs du chapitre

Définir la notion de fonction.

Définir les opérations usuelles sur les fonctions.

Savoir étudier la parité d'une fonction.

Savoir étudier le sens de variations d'une fonction.

1 Définitions

Définition (Question de cours)

Une fonction f est définie par :

i) un mécanisme, ou une expression : $f(x) = \dots$, ou $f : x \mapsto f(x)$. À chaque nombre x, on associe un nombre $f(x)$, appelé l'**image de x par f**.

ii) son ensemble de définition : $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x)}$ **existe**$\}$. Il se peut qu'on ne puisse pas définir l'image de tous les nombres réels.

Si $f(x) = y$, alors on dit que x est un **antécédent** de y par f.

Remarques importantes !!

Deux cas de figure sont possibles lorsqu'une fonction sera définie dans un exercice :

- soit l'ensemble de définition sera donné ; il faudra faire attention qu'on ne travaillera que sur cet ensemble.
- soit il faudra le déterminer et là trois problèmes peuvent se poser :
  - ∗ un quotient : ne pas oublier qu'on ne peut pas diviser par 0.
  - ∗ une racine carrée : ne pas oublier que la quantité sous la racine doit être positive.
  - ∗ un logarithme (on découvrira cette nouvelle fonction plus tard dans l'année) : ne pas oublier que l'argument du logarithme doit être strictement positif.

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

i) $\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$, ii) $x - \sqrt{9-x^2}$, iii) $\ln\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.

Remarques importantes !!

Un nombre de l'ensemble de définition de f n'a qu'**une seule image**. En revanche, un nombre réel **peut avoir plusieurs antécédents mais il peut aussi ne pas en admettre**.

2 Courbe représentative

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. On appelle **courbe représentative** ou **graphe** de f l'ensemble des points du plan défini par

$$\mathscr{C}_f = \left\{M(x,y),\ x \in \mathscr{D}_f \text{ et } y = f(x)\right\}.$$

L'**équation** de cet ensemble est donnée par $y = f(x)$. Autrement dit, un point appartient au graphe de f si son ordonnée est égale à l'image par f de son abscisse.

Avec la courbe de f, on peut résoudre graphiquement des équations ou des inéquations :

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à chercher l'abscisse des points de la courbe qui ont pour ordonnée k. Autrement dit, on cherche l'abscisse des points d'intersection de la courbe de f et la droite horizontale d'équation $y = k$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq k$ revient à chercher l'abscisse des points de la courbe qui ont une ordonnée supérieure à k. Autrement dit, on cherche l'abscisse des points de la courbe de f qui sont au dessus de la droite d'équation $y = k$.
- Plus généralement, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher l'abscisse des points d'intersection du graphe de f et de celui de g.
- Et résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont en dessous de $\mathscr{C}_g$.

3 Opérations sur les fonctions

3.1 Définitions

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On définit la **somme** de f et g comme la fonction définie sur I par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in I$.
- On définit le **produit de f par λ** comme la fonction définie sur I par $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$ pour tout $x \in I$.
- On définit le **produit de f et g** comme la fonction définie sur I par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in I$.
- On définit le **quotient de f par g** comme la fonction définie là où g ne s'annule pas par $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, pour tout $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$.

Définition

Soit $f : I \to J$ et g une fonction définie sur un ensemble contenant J. Alors on définit la **composée de f et g** comme la fonction définie sur I par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd} x \in I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \in J \arrow[r, "g"] & g\big(f(x)\big) \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exercice 2 (Exercice de khôlle)

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants :

i) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Remarques importantes !!

⚠ On vient de voir sur un exemple que dans le cas général, $g \circ f \neq f \circ g$. ⚠

3.2 Bijection et fonction réciproque

Définition (Question de cours)

Soit $f : I \to J$. On dit que f est une **bijection de I dans J** si tout élément de J admet un unique antécédent par f. Autrement dit, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution. Dans ce cas, on définit la fonction $f^{-1} : J \to I$ par $f^{-1}(y) = x$ et on l'appelle la **réciproque de f**.

Exercice 3

Déterminer si les fonctions suivantes sont des bijections et si oui, donner leur réciproque :

$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\quad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Théorème

Soit $f : I \to J$. f est une bijection si et seulement s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_I$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_J$ i.e. pour tout $x \in I$, $g\big(f(x)\big) = x$ et pour tout $y \in J$, $f\big(g(y)\big) = y$.

4 Parité

Définition (Question de cours)

Soit f une fonction et $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.

- On dit que $\mathscr{D}_f$ est **symétrique par rapport à 0** si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $-x \in \mathscr{D}_f$.
- On dit que f est **paire** si
  i) $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0,
  ii) pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si
  i) $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0,
  ii) pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarques importantes !!

- Une fonction peut n'être ni paire ni impaire.
- Si f est paire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors son graphe est symétrique par rapport à O.
- Si $0 \in \mathscr{D}_f$ et si f est impaire, alors $f(0) = 0$ et donc le graphe de f passe par l'origine du repère.

Exercice 4

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires :

i) $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
ii) $g(x) = x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
iii) $h(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

5 Sens de variations

Définition (Question de cours)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

- f est **croissante** sur I si pour tout $x, y \in I$, $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ i.e. les images par f sont rangées dans le même ordre que les nombres.
- f est **décroissante** sur I si pour tout $x, y \in I$, $x \leq y$ implique $f(x) \geq f(y)$ i.e. les images par f sont rangées dans le sens contraire des nombres.
- f est **strictement croissante** sur I si pour tout $x, y \in I$, $x < y$ implique $f(x) < f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tout $x, y \in I$, $x < y$ implique $f(x) > f(y)$.
- f est **constante** sur I si pour tout $x, y \in I$, $f(x) = f(y)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition puis les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{6-2x}$.

6 Majorant, minorant

Définition (Question de cours)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $m, M \in \mathbb{R}$. On dit que

- f est **majorée par M** si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Dans ce cas, M est appelé un **majorant de f**.
- f est **minorée par m** si pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$. Dans ce cas, m est appelé un **minorant de f**.
- f est **bornée** si elle est majorée et minorée.

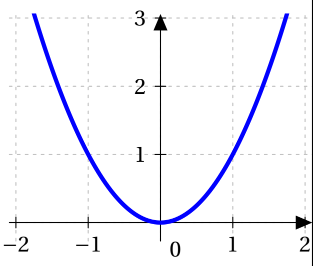
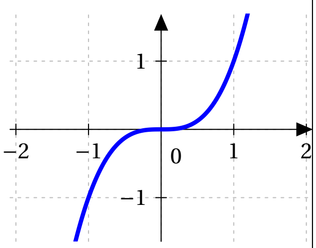
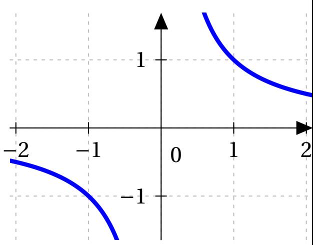
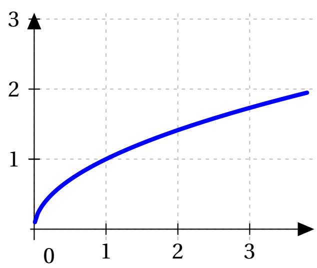
Remarques importantes !!

Un majorant ou un minorant est une constante ! Le membre de droite de l'inégalité ne dépend pas de x.

Exercice 6

Montrer que la fonction f définie sur $[1; +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \geq 1$ est bornée.

7 Fonctions de référence

Fonctions	Graphe	Tableau de variations	Variations
$f(x)=x^2$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$		x : $-\infty$ 0 $+\infty$ f : ↘ ↗	f est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$
$f(x)=x^3$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$		x : $-\infty$ $+\infty$ f : ↗	f est croissante sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^*$		x : $-\infty$ 0 $+\infty$ f : ↘ ‖ ↘	f est décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^+$		x : 0 $+\infty$ f : ↗	f est croissante sur $\mathbb{R}^+$