## CHAPITRE V

# GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS
# EXERCICES

**Exercice 1** **(Exercice de khôlle)**

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, ii) $g(x) = \dfrac{2x+3}{x(1-2x)}$, iii) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$, iv) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, v) $l(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$.

**Exercice 2**

Dans chaque cas, donner les ensembles de définition des fonctions $f$ et $g$ et déterminer les expressions de $f+g$, $fg$, $f \circ g$ et $g \circ f$ :

i) $f(x) = 2x^2 + 3x$ et $g(x) = \sqrt{3x-1}$,

ii) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ et $g(x) = 1 - 3x^2$,

iii) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = x(x^2-4)$,

iv) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4}$.

**Exercice 3**

Étudier la parité des fonctions de l'exercice précédent.

**Exercice 4**

Déterminer si les fonctions suivantes sont bijectives et si oui, donner leur réciproque :

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$, $g: \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$, $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$.

**Exercice 5**

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par -1 et 1.

**Exercice 6**

1. Soit $f(x) = 2x^3 - x + 1$ et $g(x) = 3x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer les graphes de $f$ et $g$ puis étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.
2. Même question avec $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ et $g(x) = x - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

**Exercice 7** **(Exercice de khôlle)**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 1$.
2. Même question mais avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

## Exercice 8 (Exercice de khôlle)

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$, noté $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
3. Étudier la position de la courbe de $f$, notée $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 3$.
4. Le tableau de variations de $f$ est le suivant :

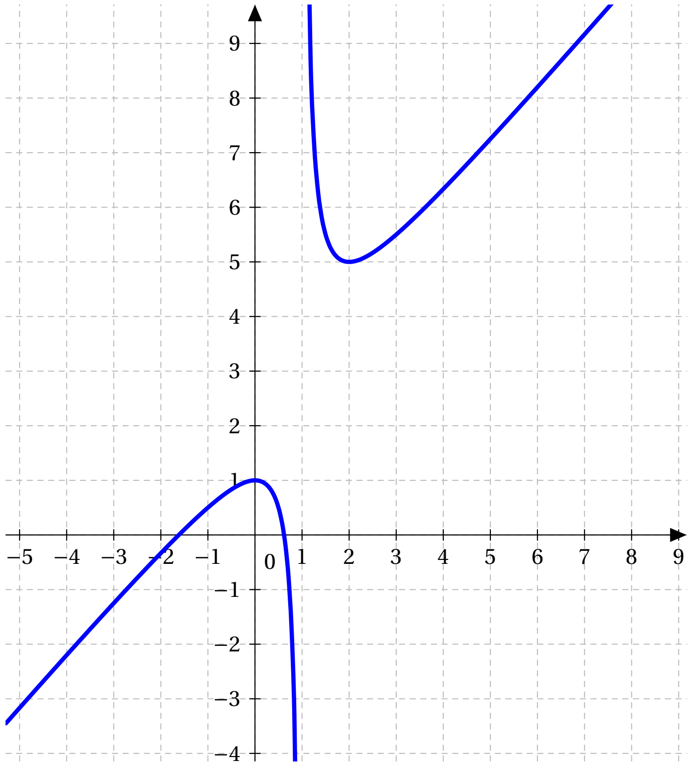
| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{5}$ | | -1 | | $-1+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $\approx -8.5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $\approx 0.5$ | ↗ | $+\infty$ |

   On donne $-1-\sqrt{5} \approx -3,2$ et $-1+\sqrt{5} \approx 1,2$.
   Tracer la droite $\Delta$ et l'allure du graphe de $f$.

## Exercice 9

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.
2. Déterminer quatre réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2-1}$.
3. On donne le graphe de $f$ ci-dessous. Tracer la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 2$.




4. À l'aide du graphique, conjecturer :
   a) la position de la courbe de $f$ par rapport à $\Delta$.
   b) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
5. Retrouver par le calcul le résultat de la question 4a.
6. a) Montrer que $-1$ est racine de $x^3 + 2x^2 - 1$ puis en déduire une factorisation de $x^3 + 2x^2 - 1$.
   b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.