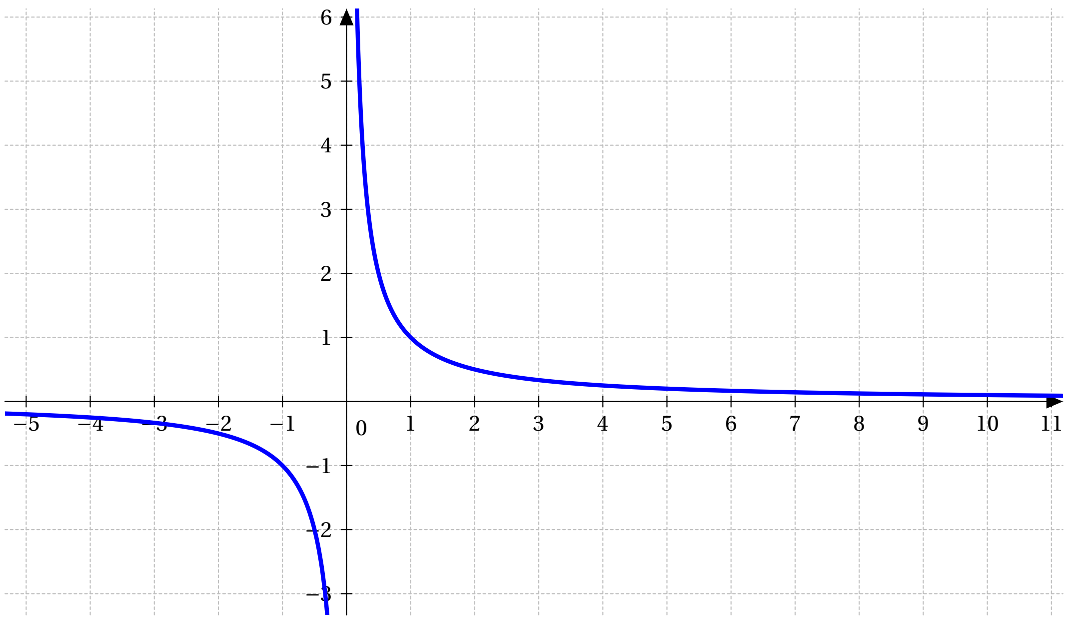
CHAPITRE VI

LIMITES D'UNE FONCTION
COURS

Objectifs du chapitre

Connaitre la définition de la limite d'une fonction en un point fini ou en $\pm\infty$.
Connaitre les limites de référence en 0 et en $\pm\infty$.
Savoir lever une indétermination "classique".

Lorsqu'on étudie une fonction f sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, il est assez naturel de s'intéresser à ce qui se passe lorsque x s'approche des bornes de $\mathscr{D}_f$, par exemple comment se comporte $\frac{1}{x}$ lorsque x devient très grand ? Plus rigoureusement, on va s'intéresser à la **limite de $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers** $+\infty$.



Si on regarde le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, celui-ci semble se rapprocher de plus en plus de l'axe des abscisses au fur et à mesure que x devient grand. On va dire que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
On peut se poser la même question lorsque x tend vers $-\infty$ et pour la fonction inverse, il est aussi intéressant de regarder ce qui se passe lorsque x se rapproche de 0.

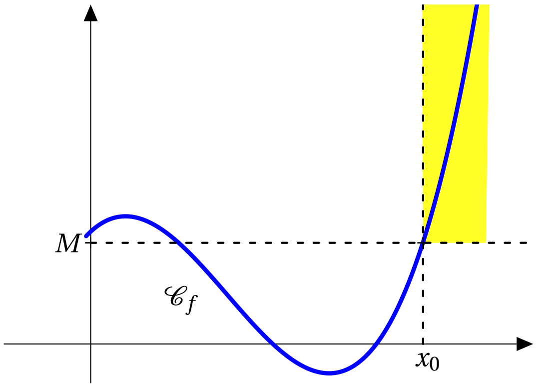
1 Limites de fonctions en $\pm\infty$

1.1 Limites en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]A, +\infty[$.

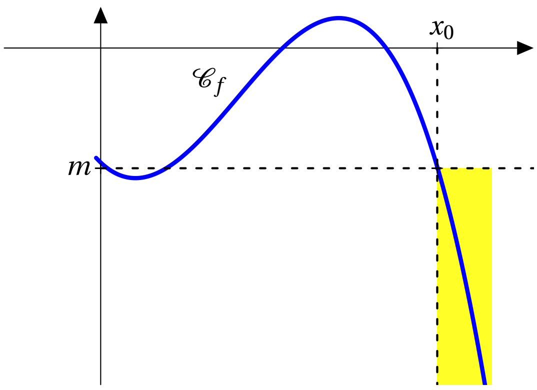
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut lorsque x devient très grand ; plus rigoureusement, f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.



Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- On dit que f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si $-f(x)$ devient aussi grand qu'on veut quand x devient très grand i.e. si tout intervalle de la forme $]-\infty, m[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

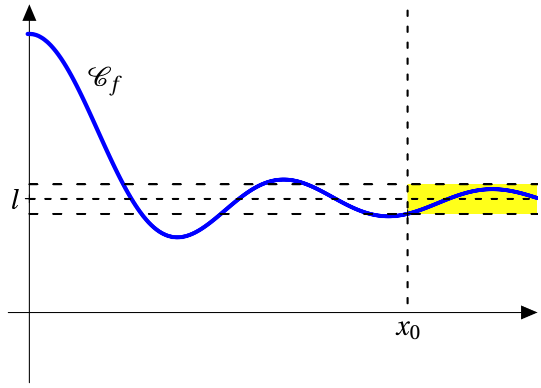


Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Définition

- On dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite en $+\infty$ si $f(x)$ s'approche autant qu'on veut de l quand x devient très grand i.e. si tout intervalle de la forme $]l-\epsilon, l+\epsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.



Dans ce cas, on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Propriété (limites de référence - Question de cours)

On a

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -x^p = -\infty$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

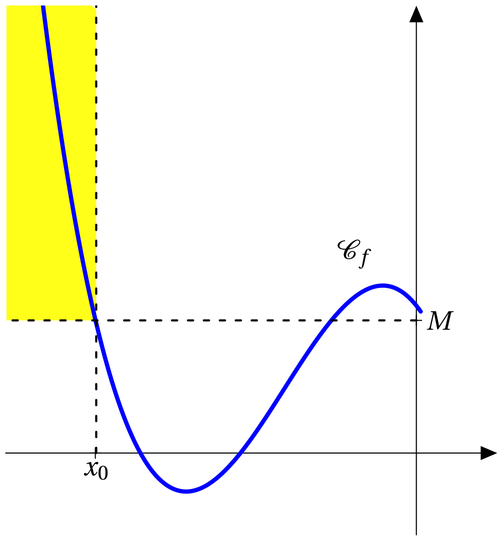
1.2 Limites en $-\infty$

On peut définir de manière analogue la notion de limite en $-\infty$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, A[$.

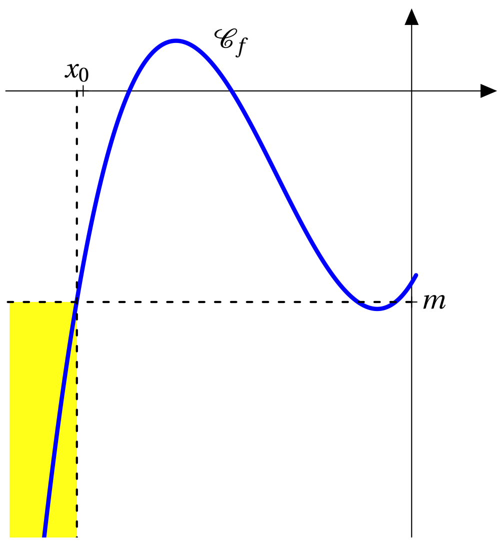
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $-x$ assez grand.



Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

- On dit que f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, m[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $-x$ assez grand.

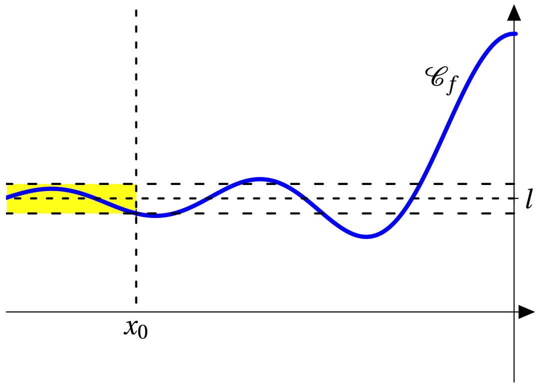


Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Définition

- On dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]l-\epsilon, l+\epsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $-x$ assez grand.



Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

Propriété (limites de référence - Question de cours)

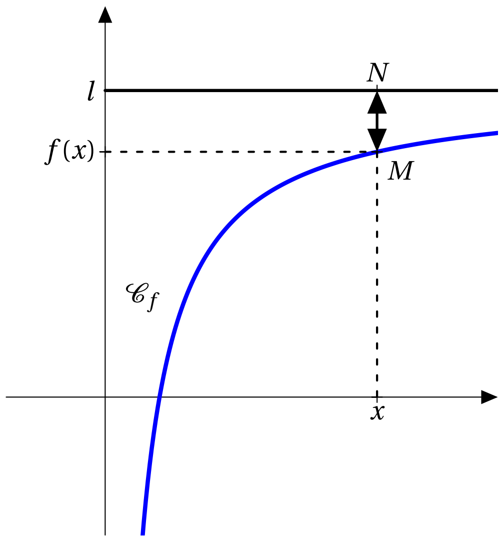
On a

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^{2p} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^{2p+1} = -\infty$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé),

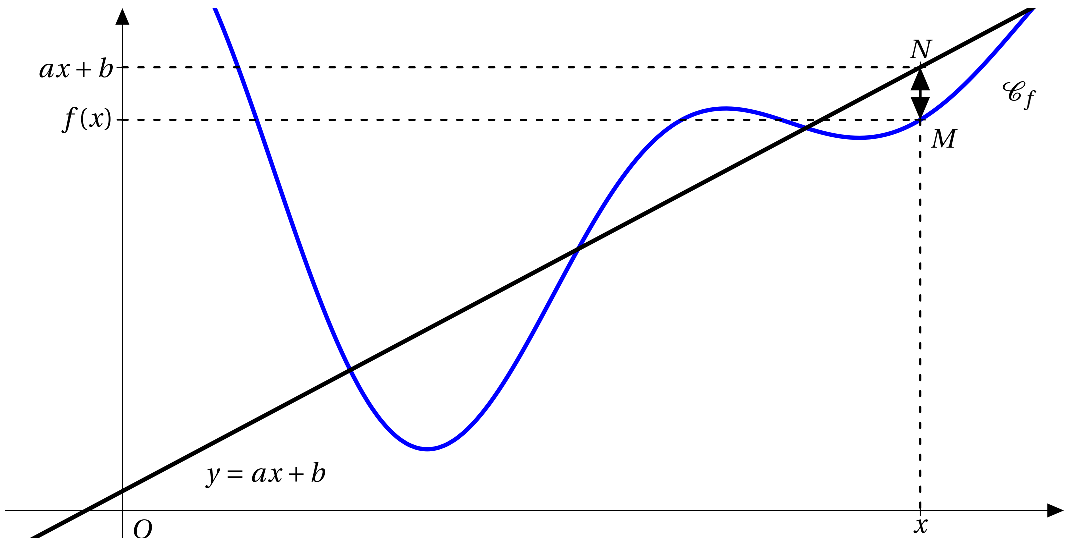
1.3 Asymptote

Lorsqu'une fonction f admet une limite finie l comme limite en $+\infty$ (ou $-\infty$), plus x grandit, plus les points M de la courbe de f, de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ s'approchent des points N de coordonnées (x, l), appartenant à la droite Δ d'équation $y = l$. Autrement dit, la distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$). On dit que la droite Δ est **asymptote** à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$).



Il se peut que la droite asymptote ne soit pas horizontale comme ci-dessus mais oblique.
La droite $\Delta : y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si

$$\Big(f(x) - (ax+b)\Big) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty(\text{ ou } -\infty).$$



Remarques importantes !!

- ⚠ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$. En revanche, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors la courbe de f n'admet pas d'asymptote horizontale mais elle peut admettre une asymptote oblique, sans que cela soit nécessairement le cas. ⚠
- Il se peut que $\mathscr{C}_f$ admette une asymptote qui n'est pas une droite mais, par exemple une parabole (ou n'importe quelle autre courbe). Pour montrer que la courbe d'une fonction g est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f(x) - g(x)\Big) = 0$.

2 Limites de fonctions en un réel a

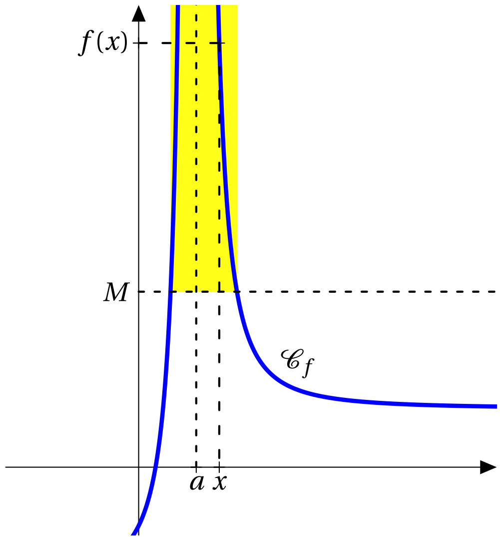
2.1 Définitions

On a regardé pour l'instant ce qui pouvait se produire quand la variable x devient infiniment grande. Intéressons-nous à présent à ce qui se passe quand x se rapproche infiniment près d'un réel a. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 mais que se passe-t-il lorsque x tend vers 0 ?

Définition

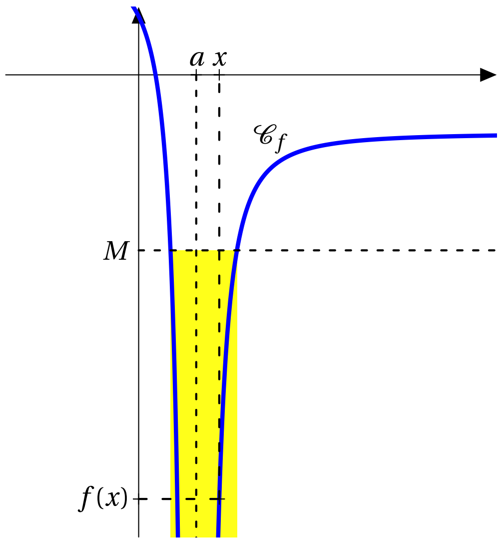
Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.



Dans ce cas, on note
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

- On dit que f admet $-\infty$ comme limite en a si tout intervalle de la forme $]-\infty, m[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.



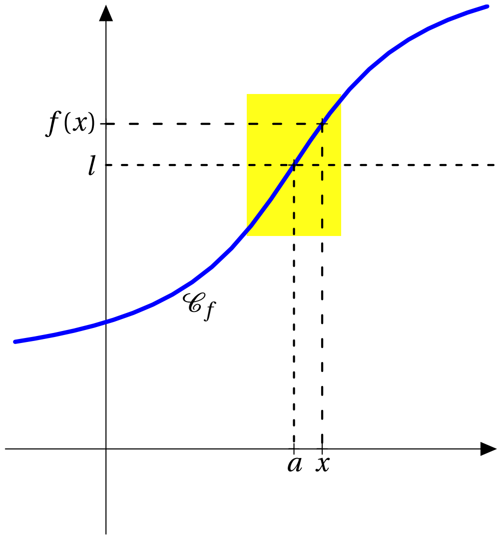
Dans ce cas, on note
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Remarques importantes !!

Dans les deux cas précédents, on remarque que la courbe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

Définition

- On dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite en a si tout intervalle de la forme $]l-\epsilon, l+\epsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.



Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

2.2 Limite à droite - Limite à gauche

Exemple 1 : Si on reprend l'exemple de la fonction inverse, quand x tend vers 0 en restant positif, alors $\frac{1}{x} \to +\infty$, alors que si x tend vers 0 mais par valeurs négatives, alors $\frac{1}{x} \to -\infty$. On parle alors de **limite à droite en 0** et de **limite à gauche en 0**. Plus précisément, on dit que $\frac{1}{x}$ admet $+\infty$ comme limite à droite en 0, ce qu'on note

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Et on dit que $\frac{1}{x}$ admet $-\infty$ comme limite à gauche en 0, ce qu'on note

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Exemple 2 : On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > -2 \\ -1 & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \end{array}$.

Alors f n'admet pas de limite en -2 mais admet une limite à droite : $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = 1$ et une limite à gauche : $\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -1$.

Remarques importantes !!

Une fonction f admet une limite finie en a si elle admet des limites à droite et à gauche et si ces limites sont égales.

3 Calculs de limites

En pratique, il est très rare qu'on doive revenir à la définition de la limite. On utilisera plutôt les résultats classiques suivants. On verra plus loin qu'il existe des formes indéterminées, où les résultats classiques ne permettent pas de conclure. Il faudra alors faire une étude un peu plus poussée de ces cas.

3.1 Stabilité algébrique

Propriété (Question de cours)

Soit f, g deux fonctions, $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que f tend vers l en a et g vers l' en a. Les tableaux ci-dessous expliquent ce qui se passe pour la somme $(f+g)$ et le produit (fg) suivant que l et l' sont réels, ou valent $+\infty$ ou $-\infty$:

$(f+g)$

l' \ l	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	f.i.
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$l+l'$	$+\infty$
$+\infty$	f.i.	$+\infty$	$+\infty$

(fg)

l' \ l	$-\infty$	$\mathbb{R}_-^*$	0	$\mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i.	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	ll'			$-\infty$
0	f.i.				f.i.
$\mathbb{R}_+^*$	$-\infty$				$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	f.i.	$+\infty$	$+\infty$

f.i. signifie qu'on tombe sur une **forme indéterminée**.

Propriété (Question de cours)

On conserve les mêmes notations que la proposition précédente. Le tableau suivant indique ce qui se passe concernant le quotient $\frac{f}{g}$.

l \ l'	$-\infty$	$\mathbb{R}_-^*$	0	$\mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	f.i.	0	0	0	f.i.
$\mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$	0	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$
0	f.i.	f.i.	f.i.	f.i.	f.i.
$\mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\frac{l}{l'}$	0	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$
$+\infty$	f.i.	0	0	0	f.i.

Exercice 1 (Exercice de khôlle)

Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3$,

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+2}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\sqrt{x}$.

3.2 Stabilité par composition

Propriété

Soit f et g deux fonctions et $a, b, c \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} \left(g\circ f\right)(x) = c$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$,

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)^3$.

3.3 Formes indéterminées

- Cas des polynômes et des fractions rationnelles

  1) Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. On considère la fonction polynomiale
  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n. \text{ Alors}$$
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n.$$

  2) Soit en outre $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$. On considère la fonction rationnelle
  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}. \text{ Alors}$$
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Exercice 3 (Exercice de khôlle)

Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-6x+8}$,

ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+6x^2-4x+12}{(x-1)(2x+3)}$.

- Cas des fonctions irrationnelles

  La méthode consiste à mettre le terme dominant en facteur puis, si cela n'a pas levé l'indétermination, alors on multiplie par la quantité conjuguée.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$,

ii) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$.

- Cas "$\frac{1}{0}$" (**à ne pas écrire sur une copie!**) Le résultat sera soit $+\infty$ si l'expression est positive, soit $-\infty$ si l'expression est négative. Il faut donc faire un tableau de signes pour déterminer le signe de l'expression.

Exercice 5 (Exercice de khôlle)

Déterminer les limites suivantes :

i) $\lim_{x\to1} \frac{x}{(x-1)^2}$,

ii) $\lim_{x\to-1} \frac{x}{x+1}$.

- Cas "$\frac{0}{0}$" (**à ne pas écrire sur une copie!**) Il faut d'abord simplifier l'expression de la fonction avant d'essayer de calculer à nouveau la limite.

Exercice 6

Calculer $\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.