

**LIMITES D'UNE FONCTION**  
**EXERCICES**

**Exercice 1**

En détaillant les réponses, déterminer les limites en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

- i)  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ ,  $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x$ ,  $k(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$  et  $l(x) = x\sqrt{x}$ .
- ii)  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 2$ ,  $g(x) = x - \sqrt{x}$ ,  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ ,  $k(x) = -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3}$  et  $l(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x+1}$ .
- iii)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2 + 3} - 3$ ,  $g(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$ , et  $h(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ .

**Exercice 2**

Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x-1}{x}, h(x) = \frac{x+2}{x-1}, k(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \text{ et } l(x) = \frac{1}{3x+1} + \frac{4}{x} + 3.$$

**Exercice 3**

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point  $x_0$  indiqué :

- i)  $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$  en  $x_0 = 2$  puis  $x_0 = -2$ ,
- ii)  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  en  $x_0 = 1$  et  $x_0 = -1$ ,
- iii)  $h(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$  en  $x_0 = 1$  et  $x_0 = -1$ ,
- iv)  $k(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x-1}$  en  $x_0 = 1$ .

**Exercice 4**

Pour chaque fonction  $f$  suivante, donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  et déterminer ses limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$  ainsi que les asymptotes éventuelles.

- i)  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ,
- ii)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}$ ,
- iii)  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$ ,
- iv)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$ . (on pourra écrire  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ .)

### **Exercice 5 (Exercice de khôlle)**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ .
2. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = x - 6$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
4. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 6$ .

### **Exercice 6**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ .
2. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ .
3. Étudier la position de la courbe de  $f$ , notée  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 3$ .
4. Montrer que  $\Delta$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
5. Étudier la limite de  $f$  en 1. Comment cela se traduit-il graphiquement ?
6. Le tableau de variations de  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f$	$-\infty$	$\approx 1.2$	$+\infty$	$\approx 6.8$	$+\infty$

On donne  $1 - \sqrt{2} \approx -0,4$  et  $1 + \sqrt{2} \approx 2,4$ .

Tracer la droite  $\Delta$  et l'allure du graphe de  $f$ .

### **Exercice 7 (Exercice de khôlle)**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

1. Déterminer  $\mathcal{D}_f$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ .
4. Montrer que la courbe de  $f$ , notée  $\mathcal{C}$  admet une asymptote oblique qu'on notera  $\Delta$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , dont on précisera une équation.
5. Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\Delta$ .
6. Étudier la limite de  $f$  en 1. Comment cela se traduit-il graphiquement ?
7. Le tableau de variations de  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f$					

Compléter le tableau de variations de  $f$  avec les limites calculées précédemment et en déterminant  $f(0)$  et  $f(2)$ .

8. Tracer les asymptotes à  $\mathcal{C}_f$ , placer les points de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 0 et 2 puis tracer l'allure du graphe de  $f$ .

### **Exercice 8**

Soit  $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$ .

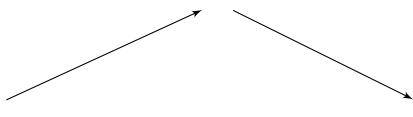
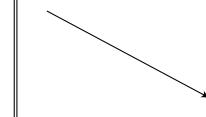
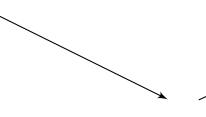
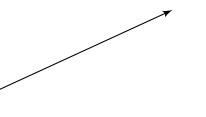
1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité éventuelle de  $f$ .
3. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
4. Montrer qu'il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ , on a

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}.$$

En déduire que la courbe de  $f$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

5. Déterminer les limites de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1, puis quand  $x$  tend vers  $-1$ . Traduire ces limites graphiquement.
6. Calculer  $f(-2)$  et  $f(2)$ .

Compléter le tableau de variations de  $f$  donné ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$
$f$						

7. Tracer les asymptotes à la courbe de  $f$ , les points de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $-2$  et  $2$  puis tracer l'allure du graphe de  $f$ .