LIMITES D'UNE FONCTION
EXERCICES

Exercice 1

En détaillant les réponses, déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

i) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - x$, $k(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$ et $l(x) = x\sqrt{x}$.

ii) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 2$, $g(x) = x - \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$, $k(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-3}$ et $l(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$.

iii) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2+3} - 3$, $g(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - 1\right)$, et $h(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$.

Exercice 2

Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ et $l(x) = \dfrac{1}{3x+1} + \dfrac{4}{x} + 3$.

Exercice 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 2$ puis $x_0 = -2$.

ii) $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$,

iii) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$,

iv) $k(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ en $x_0 = 1$.

Exercice 4

Pour chaque fonction f suivante, donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f et déterminer ses limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$ ainsi que les asymptotes éventuelles.

i) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$,

ii) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$,

iii) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$,

iv) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$. (*on pourra écrire* $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.)

Exercice 5 (Exercice de khôlle)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 6$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x - 6$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
3. Étudier la position de la courbe de f, notée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x + 3$.
4. Montrer que Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Étudier la limite de f en 1. Comment cela se traduit-il graphiquement ?
6. Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	≈ 1.2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	≈ 6.8	↗	$+\infty$

   On donne $1 - \sqrt{2} \approx -0,4$ et $1 + \sqrt{2} \approx 2,4$.
   Tracer la droite Δ et l'allure du graphe de f.

Exercice 7 (Exercice de khôlle)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Montrer que la courbe de f, notée $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique qu'on notera Δ en $+\infty$ et en $-\infty$, dont on précisera une équation.
5. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
6. Étudier la limite de f en 1. Comment cela se traduit-il graphiquement ?
7. Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f		↗		↘	‖	↘		↗	

   Compléter le tableau de variations de f avec les limites calculées précédemment et en déterminant $f(0)$ et $f(2)$.
8. Tracer les asymptotes à $\mathscr{C}_f$, placer les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et 2 puis tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 8

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité éventuelle de f.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on a

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}.$$

   En déduire que la courbe de f, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 1, puis quand x tend vers -1. Traduire ces limites graphiquement.
6. Calculer $f(-2)$ et $f(2)$.
   Compléter le tableau de variations de f donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. Tracer les asymptotes à la courbe de f, les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2 et 2 puis tracer l'allure du graphe de f.