CHAPITRE VII

Continuité
Cours

Objectifs du chapitre

Connaitre la définition de la continuité en un point.

Savoir si une fonction est continue grâce à sa courbe représentative.

Savoir montrer qu'une fonction est continue.

Connaitre et savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Connaitre et savoir utiliser le théorème de la bijection.

1 Continuité

1.1 Définition

Précédemment, nous avons défini la limite (éventuelle) d'une fonction en un point a de son ensemble de définition. La plupart du temps, on a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ mais on a vu que parfois, ce n'était pas le cas; on a d'ailleurs introduit la notion de limite à gauche et limite à droite. Ici, nous allons nous intéresser au premier cas de figure i.e. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Définition (Question de cours)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **continue en a** si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point a de I.

Remarques importantes !!

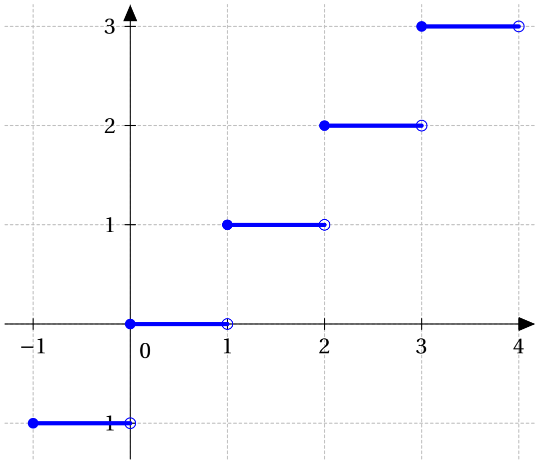
- Graphiquement, une fonction f est continue sur un intervalle I si on peut tracer son graphe sans lever le crayon; autrement dit, son graphe ne présente pas de **point de discontinuité**.
- La continuité est une notion **locale** i.e. une notion au voisinage d'un point.

Ex : i) La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

ii) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

iii) La fonction **partie entière**, notée E est définie comme suit : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x; par exemple, $E(0) = 0$, $E\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $E(0{,}999) = 0$, $E(1) = 1$, $E(1{,}5) = 1$, $E(1{,}999) = 1$, $E(2) = 2$ ou $E\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

Son graphe est le suivant :



Alors E est continue sur $[0,1[$ et sur $[1,2[$ mais E n'est pas continue sur $[0,2[$; en effet, elle possède une discontinuité en 1. En fait, elle admet une discontinuité en tous les entiers.

1.2 Continuité à gauche, à droite

On a vu dans le chapitre sur les limites qu'il était parfois utile de considérer la limite à gauche ou à droite. Ces notions nous permettent donc de définir celles de continuité à gauche et de continuité à droite.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **continue à gauche en a** (resp **à droite en a**) si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$).

Théorème

f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exercice 1 (Exercice de khôlle)

Montrer que la fonction suivante est continue en 0 : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x+3 \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1.3 Propriétés

On a déjà vu qu'en pratique, on n'utilisait que très rarement la définition de la limite. De même, pour montrer qu'une fonction est continue, on ne va pas utiliser la définition mais plutôt utiliser des résultats de stabilités.

Théorème

La somme, la différence, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Démonstration.

Ce résultat est une conséquence directe de la stabilité algébrique et par composition des limites. □

Pour que ce résultat soit utilisable, il faut déjà connaitre des fonctions continues. Les résultats suivants vont nous assurer que les fonctions usuelles (puissance, inverse, racine carrée...) le sont.

Propriété

Les fonctions puissance, inverse et racine carrée sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

Propriété

Les fonctions polynômes, rationnelles et composées avec la racine carrée sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

Remarques importantes !!

En pratique, pour étudier la continuité d'une fonction sur son ensemble de définition, on se ramènera à étudier la continuité en un point.

Exercice 2

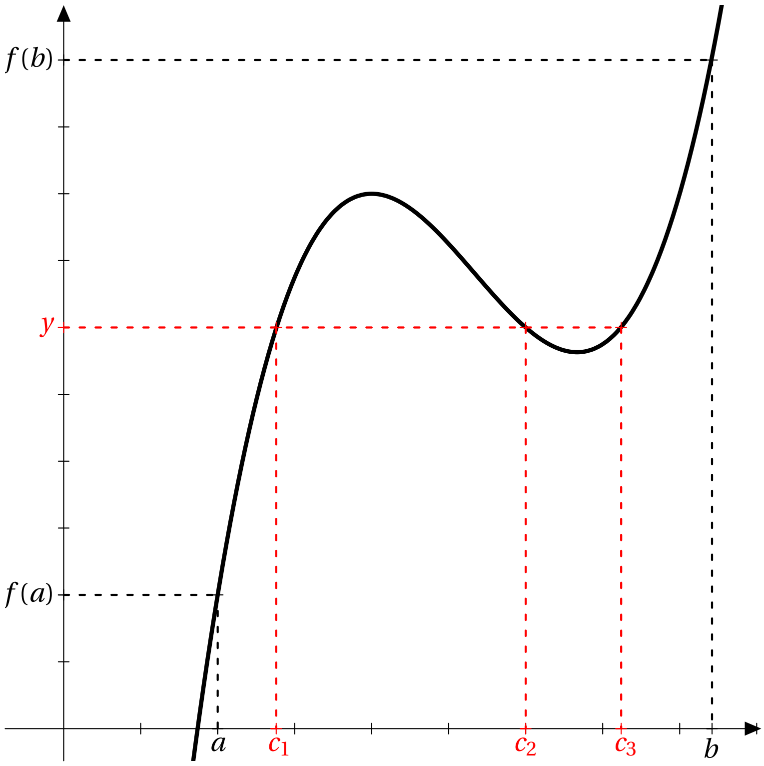
Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x+3 \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Question de cours)

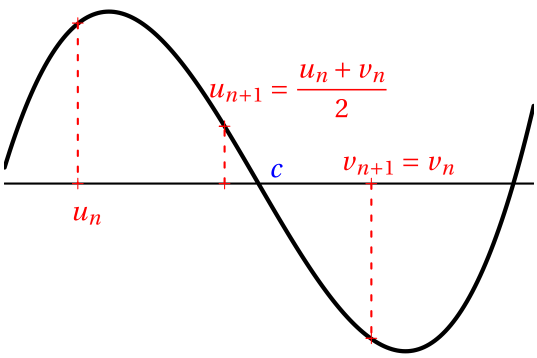
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c, compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

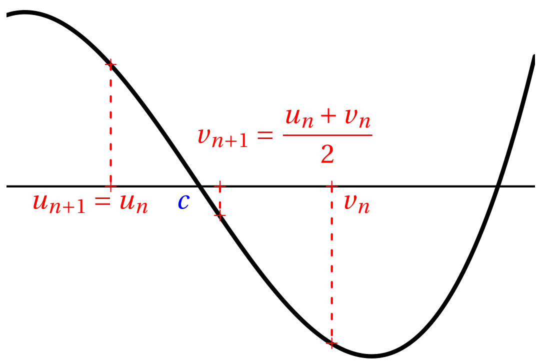
Démonstration.
Commençons par une esquisse de justification grâce à un dessin :



Sur le dessin, on se rend bien compte que nécessairement, la courbe de f doit couper toute droite horizontale entre $f(a)$ et $f(b)$. ⚠ Cela ne fournit en rien une démonstration du théorème.⚠
Pour démontrer ce résultat, on utilise la méthode par **dichotomie**. Soit y un réel entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère la fonction $g(x) = f(x) - y$. On cherche donc un zéro de la fonction g. On construit deux suites (u_n) et (v_n) comme suit : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- si $g(u_n)$ et $g\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ ont même signe, on pose $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.
- si $g(u_n)$ et $g\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$ ont des signes contraires, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.





Par construction (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(u_n - v_n)$ tend vers 0. On dit (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**. Donc elles convergent vers une même limite c tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = y$. □

Remarques importantes !!

- On voit bien sur l'exemple que le réel c n'est pas nécessairement unique.
- On pourra dans les exercices utiliser *Python* pour obtenir une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On suppose que $a \leq b$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) peut s'énoncer en terme d'équation :
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution sur $[a, b]$.

Définition

On appelle **image** de l'intervalle I par la fonction f l'ensemble

$$f(I) = \left\{ f(x), x \in I \right\}.$$

Autrement dit, $f(I)$ est l'ensemble de toutes les valeurs des $f(x)$ quand x décrit I.

Le TVI peut alors s'énoncer en terme d'inclusion en disant que le segment $\left[f(a), f(b)\right]$ (ou $\left[f(b), f(a)\right]$ si $f(b) \leq f(a)$) est inclus dans $f(I)$: $\left[f(a), f(b)\right] \subset f(I)$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors l'image de I par f, $f(I)$ est un intervalle.

Théorème (théorème de la bijection - Question de cours)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a, b]$.

1) On a $f(I) = \left[f(a), f(b)\right]$ si f est croissante et $f(I) = \left[f(b), f(a)\right]$ si f est décroissante.
2) Pour tout $y \in f(I)$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Autrement dit f réalise une **bijection** de $[a, b]$ sur $\left[f(a), f(b)\right]$ si f est croissante et sur $\left[f(b), f(a)\right]$ si f est décroissante.

Démonstration.

1) On suppose que f est strictement croissante. Donc pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ d'où $f(I) \subset \left[f(a), f(b)\right]$.
   Réciproquement, par le TVI, on sait que $\left[f(a), f(b)\right] \subset f(I)$. Donc finalement, $f(I) = \left[f(a), f(b)\right]$.
2) Le TVI assure déjà l'existence d'un tel réel x. En outre, la stricte monotonie de f impose que deux nombres distincts ont des images différentes. Donc x est unique.

□

Remarques importantes !!

- Si $f(a)f(b) < 0$, alors nécessairement f s'annule sur $[a, b]$.
- La continuité et la stricte monotonie sont des conditions nécessaires pour avoir le théorème précédent :
  - ∗ la continuité assure l'existence de x par le TVI.
  - ∗ la stricte monotonie assure l'unicité de x.

On peut étendre légèrement le résultat précédent.

Théorème

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur son image J i.e. pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Résumons les différents cas de figures possibles : a et b peuvent être réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

	f strictement croissante	f strictement décroissante
$I = [a,b]$	$f(I) = \big[f(a), f(b)\big]$	$f(I) = \big[f(b), f(a)\big]$
$I =]a,b]$	$f(I) = \Big]\lim\limits_a f, f(b)\Big]$	$f(I) = \Big[f(b), \lim\limits_a f\Big[$
$I = [a,b[$	$f(I) = \Big[f(a), \lim\limits_b f\Big[$	$f(I) = \Big]\lim\limits_b f, f(a)\Big]$
$I =]a,b[$	$f(I) = \Big]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\Big[$	$f(I) = \Big]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f\Big[$

Exercice 3 (Exercice de khôlle)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x^2 - 1$.
On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

1. Compléter le tableau de variations de f avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que les valeurs de $f(0)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

   b) Montrer que $\alpha \in [2,3]$.

Terminons par un résultat donnant l'existence d'un maximum et d'un minimum d'une fonction continue sur un segment.

Propriété

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a,b]$. Alors f possède un maximum et un minimum sur $[a,b]$, noté $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.