CHAPITRE VII

CONTINUITÉ
EXERCICES

Exercice 1

Étudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 \text{ si } x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$,

2) $g(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$,

3) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$,

4) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \text{ si } x \neq 3 \\ 2 \text{ si } x = 3 \end{cases}$ en $x_0 = 3$.

Exercice 2

Soit les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -x & \text{si } x > 2 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in]-\infty; -2] \\ -x & \text{si } x \in]-2; 2[\\ -1 & \text{si } x \in [2; +\infty[\end{cases}, \qquad k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Étudier la continuité de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 **(Exercice de khôlle)**

On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{3}{2}$ admet exactement deux solutions, notées α et β sur $\mathscr{D}_f$, avec $\alpha < \beta$.

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Montrer que le graphe de f, noté $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique, notée Δ en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.
5. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
6. Étudier la limite de f en 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?
7. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

   Compléter le tableau de variations de f.

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β telles que $\alpha < \beta$.
9. Donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.
10. Donner l'allure de $\mathscr{C}$ et Δ.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathscr{D}_f$.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Étudier la position de la courbe de f, notée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ.
6. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}_f$?
7. Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	≈ 1.2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	≈ 6.8	$\nearrow$	

   Compléter le tableau avec les limites calculées précédemment.

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées α et β telles que $\alpha < \beta$. Montrer que $\alpha \in [-3; -2]$.

9. On considère le script *Python* suivant :

```
from pylab import *
def f(x):
    return (x**2+2*x-1)/(x-1)

u=-5
v=-.5
c=(u+v)/2
while v-u>.01:
    if f(u)*f(c)<0:
        v=c
    else:
        u=c
    c=(u+v)/2
print(c)
```

Le résultat renvoyé est $-2,4116$; comment peut-on interpréter ce résultat ?

10. On donne $1-\sqrt{2}\approx -0,4$ et $1+\sqrt{2}\approx 2,4$.
Tracer la droite Δ et l'allure du graphe de f.