CHAPITRE VIII

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES
COURS

Objectifs du chapitre

Connaitre la définition d'une probabilité conditionnelle et savoir la retrouver dans un arbre.

Connaitre et savoir utiliser la formule de Bayes.

Connaitre et savoir utiliser la formule des probabilités totales.

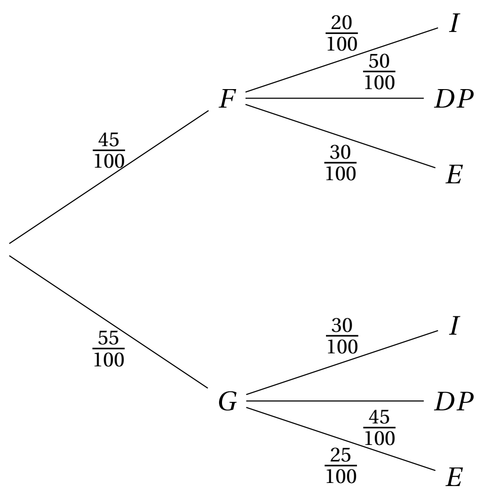
Connaitre et savoir utiliser la formule des probabilités composées.

Savoir montrer que deux événements sont indépendants.

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Un exemple

Dans une classe, 45% des élèves sont des filles et donc 55% sont des garçons. Parmi les filles, 20% sont internes, 50% sont demi-pensionnaires et 30% sont externes, et parmi les garçons, 30% sont internes, 45% demi-pensionnaires et 25% sont externes. On peut représenter cette situation par l'**arbre pondéré** suivant :



Avec les événements suivants :

F : "*Être une fille*",

G : "*Être un garçon*",

I : "*Être interne*",

DP : "*Être demi-pensionnaire*",

E : "*Être externe*".

Remarques importantes !!

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1. C'est ce qu'on appelle la **loi des nœuds**.

- Le chemin $\xrightarrow{\frac{45}{100}} F \xrightarrow{\frac{20}{100}} I$ représente l'événement $F \cap I$: "*Être une fille interne*". La probabilité de cet événement est $\frac{45}{100} \times \frac{20}{100}$. En effet, si on note n le nombre d'élèves de la classe, celui des filles est $0,45 \times n$ et parmi les filles, celles qui sont internes sont $0,2 \times 0,45 \times n$. D'où

$$\mathbb{P}(F \cap I) = \frac{0,2 \times 0,45 \times n}{n} = \frac{20}{100} \times \frac{45}{100}.$$

  Cette **probabilité est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin**.

  Le nombre inscrit sur la branche $\xrightarrow{\frac{45}{100}} F$ est la probabilité d'être une fille :

  $\mathbb{P}(F) = \frac{45}{100}$ alors que le nombre inscrit sur la branche $F \xrightarrow{\frac{20}{100}} I$ est la probabilité d'être interne pour une fille i.e. la probabilité d'être interne **sachant qu'on est une fille**. On la note $\mathbb{P}_F(I)$.

- Si on s'intéresse à l'événement "*être externe*", alors deux cas sont possibles : "*Être une fille externe* $(F \cap E)$" ou "*Être un garçon externe* $(G \cap E)$" ; ces deux événements étant incompatibles. Donc $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F \cap E) + \mathbb{P}(G \cap E)$, avec $\mathbb{P}(F \cap E) = \frac{45}{100} \times \frac{30}{100}$ et $\mathbb{P}(G \cap E) = \frac{55}{100} \times \frac{25}{100}$.
  Donc la **probabilité d'un événement est la somme des probabilités des différents chemins qui aboutissent à cet événement**.

1.2 Définition et propriétés

Définition (Question de cours)

On considère Ω un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de Ω tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité (conditionnelle) de A sachant B** est le nombre

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

C'est la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est lui-même réalisé.

Propriété

$\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω donc elle vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.

Remarques importantes !!

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Propriété

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$.

Démonstration.
C'est une simple réécriture de la définition de $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$. □

Cette propriété nous permet d'écrire la **formule de Bayes** ou formule d'inversion de conditionnement :

Propriété (Formule de Bayes - Question de cours)

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. On a

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Exercice 1

En réutilisant les notations de l'exemple 1.1, calculer la probabilité $\mathbb{P}_I(F)$.

Propriété (Formule des probabilités totales - Question de cours)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements de l'univers Ω, constitué d'évenements de probabilité non nulle et A un événement de Ω.

1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A_1) + \mathbb{P}(A \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap A_n)$.

2) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(A) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A)$.

Exercice 2

Toujours avec les notations de l'exemple 1.1, calculer $\mathbb{P}(E)$.

Terminons cette partie par la formule des probabilités composées :

Propriété (Question de cours)

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ des événements de l'univers Ω. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 3 (Exercice de khôlle)

Une urne contient trois boules blanches et cinq noires. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. On note pour tout $1 \leq k \leq 3$, B_k l'événement "*la $k^{ième}$ boule est blanche*".

1. Calculer $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche lors du deuxième tirage.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage sachant que la deuxième est blanche.
4. On considère l'événement A : "*on obtient trois boules blanches*". Calculer $\mathbb{P}(A)$.

2 Indépendance

2.1 Cas de deux événements indépendants

Définition

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Autrement dit, la réalisation d'un de ces événement ne change en rien la réalisation de l'autre.

Théorème

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Démonstration.

A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. □

Remarques importantes !!

- D'après ce qui précéde, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- ⚠ Il ne faut pas confondre **indépendants** et **incompatibles**. ⚠

Exercice 4

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant trois jetons rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jetons jaunes numérotés 1 et 2 et un jeton bleu numéroté 1. On désigne par R l'événement "*Le jeton est rouge*", U : "*Le numéro du jeton est 1*" et D : "*Le numéro du jeton est 2*".
Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Propriété

Soit A et B deux événements indépendants. Alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2.2 Cas de n événements indépendants

Définition

Soit A_1, A_2,…, A_n des événements de l'univers Ω. On dit que

- $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont **deux à deux indépendants** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.
- $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont **(mutuellement) indépendants** si pour tout $I \subset \{1;2;\ldots;n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 5

Soit A_1, A_2 et A_3 trois événements. Écrire les relations à vérifier pour montrer que les trois événements sont indépendants.

Remarques importantes !!

⚠ Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse. ⚠

Exercice 6

On considère une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6. On tire dans cette urne deux boules, avec remise. On note P_1 l'événement “*la première boule porte un numéro pair*”, I_2 : “*la deuxième boule porte un numéro impair*” et S : “*la somme des numéros est paire*”.

1. Déterminer l'univers associé à cette expérience puis en déduire son cardinal i.e. son nombre d'éléments.
2. Les événements P_1, I_2 et S sont-ils indépendants ? Et indépendants deux à deux ?