PROBABILITÉS CONDITIONNELLES
EXERCICES

Exercice 1 (Exercice de khôlle)

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile. On a constaté que :

- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule de ce parc, la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de $\frac{2}{3}$.
- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de $\frac{1}{2}$.
- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de $\frac{3}{4}$.

On choisit une voiture du parc au hasard et on note :

F : "*Le véhicule présente un défaut de freinage*".

E : "*Le véhicule présente un défaut d'éclairage*".

1. Résumer cette étude par un arbre.
2. Déterminer la probabilité qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage.
3. Déterminer la probabilité qu'un véhicule présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage.

Exercice 2

Une urne contient deux boules blanches et deux boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : "*obtenir au moins une boule blanche*", B : "*obtenir deux boules noires*" et C : "*obtenir une boule blanche et une boule noire*".
2. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_A(C)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Exercice 3 (Exercice de khôlle)

D'après une enquête de l'INSEE, la population active en France comprend 52% de femmes. Le taux de chômage chez les hommes est de 7,5% et il est de 7,3% chez les femmes. On choisit au hasard une personne parmi les actifs. On note H, F et C les évènements "*être un homme*", "*être une femme*" et "*être au chômage*".

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit au chômage ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une femme sachant qu'elle est au chômage ?

Exercice 4

On considère une population de sujets pour laquelle la fréquence d'une maladie est de 10%. Un test diagnostic, pour cette maladie, donne une réponse positive avec une fréquence de 0,8 si le sujet est malade et de 0,1 si le sujet n'est pas malade. On note M l'évènement "*le sujet est porteur de la maladie*" et T^+ l'évènement "*le test est positif*".

1. Résumer cette situation par un arbre.
2. Pour un sujet malade, quelle est la probabilité d'avoir un test positif?
   Rq : Cette probabilité s'appelle la **sensibilité** du test. Pour qu'un test soit intéressant, la sensibilité doit-elle être grande ou petite ?
3. Pour un sujet sain, quelle est la probabilité d'avoir un test négatif?
   Rq : Cette probabilité s'appelle la **spécificité** du test. Pour qu'un test soit intéressant, le spécificité doit-elle être grande ou petite ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un test positif?
5. Si le test est positif, quelle est la probabilité que le sujet soit malade ?

Exercice 5

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4.

1. On tire deux boules simultanément.
   Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?
2. On tire une boule, puis une seconde boule.
   Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?
3. On tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.
   Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?

Exercice 6 (Exercice de khôlle)

Dans une population, 10% des individus sont atteints de la maladie a. Parmi les individus atteints de cette maladie, 20% ont une maladie b et alors que seulement 4% des non porteurs de la maladie a sont atteints de la maladie b. On choisit au hasard une personne dans cette population et on considère les évènements suivants :
A : "*l'individu est atteint de la maladie a*" et B : "*l'individu est atteint de la maladie b*".

1. Traduire sous forme d'arbre les données de l'énoncé.
2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
3. Déterminer la probabilité que l'individu ait la maladie a sachant qu'il est atteint de la maladie b.

Exercice 7

Un fumeur essaie d'arrêter de fumer. On modélise la situation ainsi :

- Le premier jour, il fume.
- S'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $\frac{1}{3}$.
- S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $\frac{3}{4}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère F_n l'évènement "*la personne fume le jour n*". On note p_n la probabilité de cet évènement.

1. Que vaut p_1 ?
2. Soit $n \geq 1$. En utilisant la formule des probabilités totales montrer que $p_{n+1} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{4}$.
3. On note $q_n = p_n - \frac{3}{7}$ pour tout $n \geq 1$.

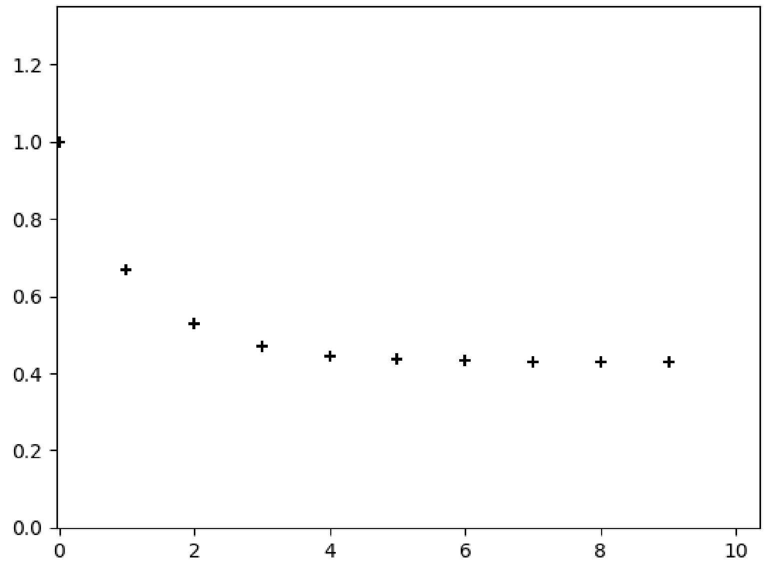
a) Calculer q_{n+1} en fonction de q_n.
Quelle est la nature de la suite (q_n) ?

b) Déterminer l'expression de q_n en fonction n puis en déduire celle de p_n.

4. Compléter le script *Python* suivant pour qu'il calcule les 10 premier termes de la suite (p_n) :

```
from numpy import *
from pylab import *
p=zeros(10)
p[0]=...
for i in range(9):
    p[i+1]=......
```

5. On complète avec le script *Python* suivant :
`scatter(range(10),p,marker='+',color='black)`
`show()`
Et on obtient le graphe suivant :



Comment interpréter ce graphique ?

Exercice 8

Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance. On note 6 l'évènement "*On obtient un 6*", P l'évènement "*Le dé est pipé*" et 2 l'évènement "*On obtient un 2*".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas pipé ?

Exercice 9

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités A, B et C.

On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change le lendemain et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités.

Le premier jour, le client choisit l'activité B. On notera pour tout $n \geq 1$, A_n (resp. B_n et C_n) l'évènement "*le client choisit l'activité A (resp. B et C) le jour n*" et on pose a_n (resp b_n et c_n) la probabilité de A_n, (resp B_n et C_n).

1. Déterminer a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Établir les relations donnant b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

Exercice 10

On considère trois urnes : l'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et aucune boule bleue et l'urne $\mathcal{U}_3$ contient une boule bleue et aucune boule rouge. On choisit d'abord au hasard une de ces trois urnes avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne et sans jamais en changer une série illimitée de tirage d'une boule avec remise.

Pour $i = 1; 2; 3$, on note U_i l'évènement "*l'urne choisie pour les tirages est l'urne $\mathcal{U}_i$*".

Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k : "*la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge*".

1. Justifier que les évènements (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'évènements.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner les probabilités $\mathbb{P}_{U_1}(R_k)$, $\mathbb{P}_{U_2}(R_k)$ et $\mathbb{P}_{U_3}(R_k)$. En déduire que $\mathbb{P}(R_k) = \frac{7}{15}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) justifier que $\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
   b) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$ et $\mathbb{P}_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$.
   c) En déduire que $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$.
3. Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants?