CHAPITRE IX

DÉRIVABILITÉ
COURS

Objectifs du chapitre

Savoir calculer le nombre dérivé et déterminer l'équation de la tangente d'une fonction.

Utiliser la fonction dérivée pour déterminer les variations d'une fonction.

Utiliser la fonction dérivée pour déterminer les extrema d'une fonction.

Utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité d'une fonction.

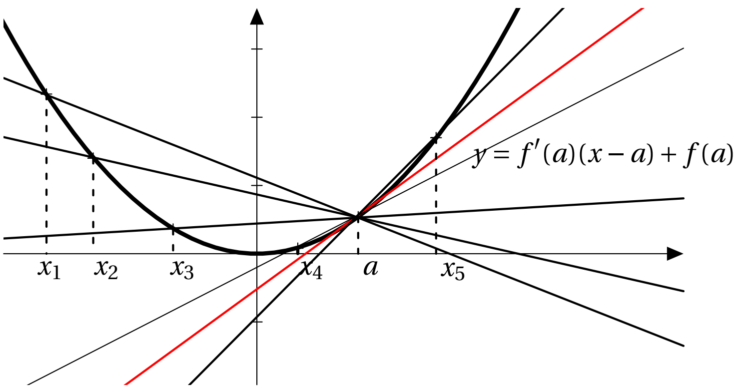
1 Introduction

L'étude globale d'une fonction peut être très compliquée. Pour simplifier cette étude, une idée assez simple consiste à dire que "localement" autour d'un point, ou "si on zoome beaucoup sur un point", la courbe ressemble énormément à sa tangente et une droite étant relativement simple à étudier, on va "remplacer" la fonction f par sa tangente. Ainsi, l'étude de la tangente à la courbe va nous permettre d'obtenir des informations sur la fonction elle-même. Cherchons alors une équation de la tangente de la courbe d'une fonction f.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction sur I. Fixons un point $a \in I$ et cherchons l'équation de la droite passant par les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$. Ce qui va nous intéresser est surtout la pente de cette droite. Elle est donnée par le **taux d'accroissement**

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

L'ordonnée à l'origine de cette corde n'est pas tellement importante pour l'instant donc attardons-nous plutôt sur le taux d'accroissement. Si on fait tendre x vers a, alors la corde va de plus en plus se rapprocher de la position d'"équilibre" qu'est la tangente.



Ainsi, la pente de la tangente va être donnée par

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

à condition que cette limite existe, bien sûr... C'est cette limite qu'on va appeler le **nombre dérivé** de f en a : $f'(a)$. Ainsi, on pourra écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point a :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Et toujours dans cette idée de remplacer f par sa tangente, on va écrire pour x proche de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \text{err},$$

où err est l'erreur commise en remplaçant f par sa tangente. Il va donc être également important de pouvoir quantifier cette erreur.

2 Dérivabilité

2.1 Généralités

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On fixe $a \in I$ et on introduit la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & I\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}. \end{array}$$

Définition

On dit que f est **dérivable** en a si g admet une limite finie en a. Si c'est la cas, $\lim_{x\to a} g(x)$ est appelé le **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$.

Remarques importantes !!

On a aussi

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Donnons une première caractérisation de la dérivabilité :

Propriété

La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\epsilon(x),$$

avec ϵ une fonction telle que $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$. Dans ce cas, $f'(a) = l$.

Remarques importantes !!

- L'égalité $f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ peut aussi s'écrire

  $$f(a+h) = f(a) + lh + h\varphi(h),$$

  avec $\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$.
  Ces égalités ne sont évidemment intéressantes qu'autour de a i.e. quand x est proche a (ou h proche de 0).
- On a une première information sur l'erreur commise en remplaçant f par sa tangente : l'erreur commise tend vers 0 "plus vite" que $(x-a)$ quand $x \to a$.

Propriété (Question de cours)

L'équation de la tangente à la courbe de f au point a est donnée par

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Propriété

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Remarques importantes !!

⚠ La réciproque est fausse ! ⚠

Exercice 1

Montrer que $f : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable en 0.

Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

La fonction $h : x \mapsto \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ sinon} \end{cases}$ est-elle dérivable en 0 ?

2.2 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

De la même manière qu'on a défini la continuité à gauche et à droite, on peut définir les notions de **dérivabilité à gauche** et **dérivabilité à droite**.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que

- f est **dérivable à gauche en a** si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'_g(a)$ cette limite.
- f est **dérivable à droite en a** si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'_d(a)$ cette limite.

Propriété

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exercice 2

Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 0 de la fonction h de l'exercice précédent. Est-elle dérivable en 0 ?

2.3 Fonction dérivée

Définition

On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on considère

$$f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array},$$

appelée **fonction dérivée** de f.

2.4 Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa dérivée. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f' est dérivable sur I et dans ce cas, on appelle **dérivée seconde** de f la fonction $f'' = \left(f'\right)'$.
Par récurrence, on peut alors définir les dérivées successives de f :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = f \\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \end{array} \right.,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f^{(n)}$ est appelée la **dérivée** $n^{\text{ième}}$ de f.

3 Dérivées usuelles et stabilités

Commençons cette partie par donner les dérivées des fonctions de référence.

Propriété (Question de cours)

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$x \longmapsto k, \quad k$ cte	$x \longmapsto 0$	sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } k(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Intéressons-nous ensuite à la stabilité de la dérivée par rapport aux opérations usuelles sur les fonctions.

Propriété (Question de cours)

Soit u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée	Remarque
$u+v$	$u'+v'$	
ku, k cte	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v(x)\neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v(x)\neq 0$
$u^n, n\in\mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x)>0$
$\frac{1}{v^n}$	$-\frac{nv'}{v^{n+1}}$	$v(x)\neq 0$

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

Calculer les dérivées première et seconde des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{2x}{3},\quad g(x)=x^4+2x^3-x^2+3x-2,\quad h(x)=\frac{x+1}{x}.$$

Propriété

Soit f et g deux fonctions. Si f est dérivable en un point a et g en $f(a)$, alors $(g\circ f)$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$.
Plus généralement, on a $(g\circ f)'=f'\times(g'\circ f)$.

4 Utilisation de la dérivée

4.1 Sens de variations

Théorème (Question de cours)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
2) f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
3) f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Remarques importantes !!

f est strictement croissante si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement nulle en des points isolés) et f est strictement décroissante si et seulement si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement nulle en des points isolés).

4.2 Extrema

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que

- f admet un **maximum local** en x_0 si, autour de x_0, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un **minimum local** en x_0 si, autour de x_0, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **maximum global** en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un **minimum global** en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit également que f admet un **extremum** si elle admet un maximum ou un minimum.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et $x_0 \in I$.

1) Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2) Si f' s'annule en x_0 et change de signe alors f admet un extremum local en x_0.

Exercice 5 (Exercice de khôlle)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.
3. En déduire le tableau de variations de f.

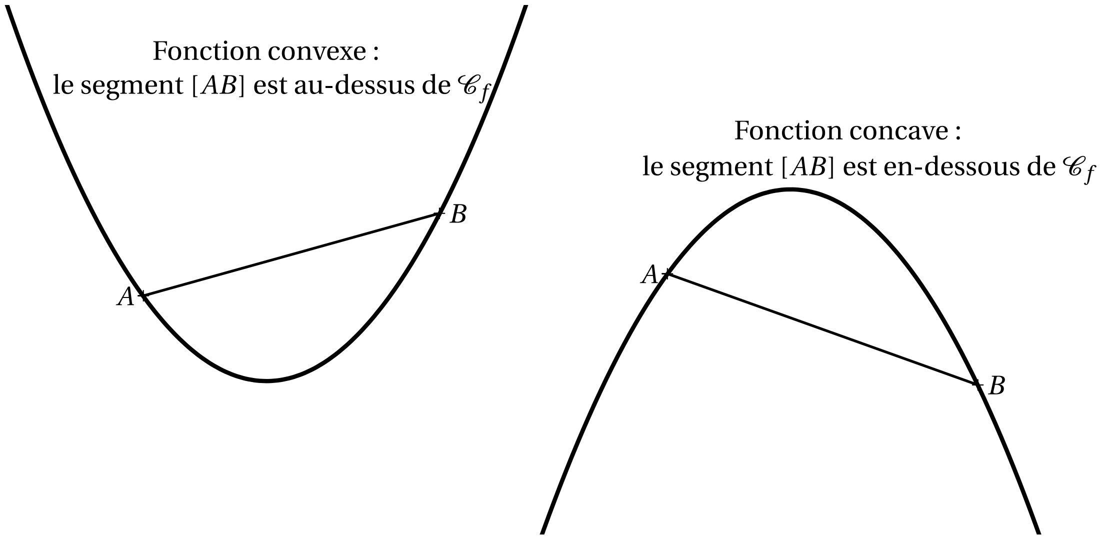
5 Fonctions convexes, point d'inflexion

5.1 Fonctions convexes

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

1) f est **convexe** si pour tous points A et B de sa courbe $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est entièrement au-dessus de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
2) f est **concave** si $-f$ est convexe.



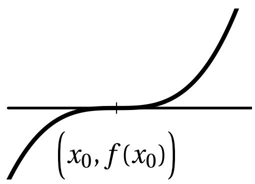
Propriété (Question de cours)

On suppose que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante si et seulement si $f'' \geq 0$.

5.2 Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $x_0 \in I$. On dit que $\mathscr{C}_f$ admet un **point d'inflexion** en x_0 si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en x_0.



Propriété

On suppose que f est deux fois dérivables sur I. $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' s'annule et change de signe en x_0.

Exercice 6

Étudier la convexité et les éventuels points d'inflexion des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.