CHAPITRE IX

DÉRIVABILITÉ
EXERCICES

Exercice 1

Étudier la dérivabilité en a des fonctions suivantes :

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 \text{ si } x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$, en $a = 1$. ii) $g(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$, en $a = 0$. iii) $h(x) = x\sqrt{x}$, en $a = 0$.

iv) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, en $a = 0$. v) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \text{ si } x \neq 3 \\ 1 \text{ si } x = 3 \end{cases}$, en $a = 3$.

Exercice 2

Déterminer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

i) $f(x) = x\sqrt{x} - 1$, ii) $g(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 1}$, iii) $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$,

iv) $k(x) = (2x^2 + 1)^3$, v) $l(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Exercice 3 **(Exercice de khôlle)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4}$.
On notera $\mathscr{C}$ la courbe de f.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?
2. Étudier les limites de f en -2 puis en 2. Comment ces limites se traduisent-elles graphiquement ?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ puis en déduire le tableau de variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
6. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ ainsi que sa tangente et ses asymptotes.

Exercice 4

Soit $f(x) = \dfrac{3x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 6x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. Montrer que $f'(1) = 0$. En déduire une factorisation de $f'(x)$ à l'aide de polynômes de degré 1.
3. En déduire les variations de f. On admet que $f(-2) = -2$, $f(-1) = -\dfrac{3}{4}$, $f(1) = -8,75$ et $f(2) = 6$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, α et β sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$ et donner un encadrement de β à l'aide de deux entiers successifs.
5. Étudier la convexité de f et ses éventuels points d'inflexion.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de f. *On donne* $\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \approx -1,5$ *et* $\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,2$.

Exercice 5

Partie A :
On considère la fonction polynomiale P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 2x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier les limites de P en $-\infty$ et en $+\infty$, puis les variations de P.
2. Déterminer les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 5 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}_f$?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$.
3. En utilisant la partie A, dresser le tableau de variations de f.
4. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ en prenant $1-\sqrt{2} \approx -0,4$; $f(1-\sqrt{2}) \approx 1,2$; $1+\sqrt{2} \approx 2,4$ et $f(1+\sqrt{2}) \approx -0,2$. On placera les éléments obtenus dans les questions précédentes.

Exercice 6 (Exercice de khôlle)

On donne $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{x-3}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, le domaine de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$.
4. En déduire que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, dont on déterminera une équation.
5. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = x+4$.
6. Déterminer $\lim\limits_{x\to3} f(x)$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?
7. Déterminer les variations de f.
8. Donner une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.
9. Tracer l'allure du graphe de f ainsi que ses asymptotes.

Exercice 7

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $P(0)$. En déduire qu'on peut factoriser P par x.
2. Calculer $P(-1)$. Que peut-on en conclure ?
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x(x+1)(ax^2+bx+c)$.
4. Factoriser P au maximum.
5. En déduire le signe de $P(x)$ en fonction des valeurs du réel x.

Partie II : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $f(x) = ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-1}$.
3. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ en $+\infty$ et $-\infty$ dont on précisera une équation. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
4. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?
5. Montrer que $x^3+2x^2-1 = (x+1)(x^2+x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$.
7. En déduire le tableau de variations de f. (On le complétera avec les limites calculées aux questions 1), 4) et 5).)
8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, notées α et β, avec $\alpha < \beta$.
9. Montrer que $\alpha \in]-2;-1[$.
10. Compléter le script *Python* suivant pour qu'il calcule une valeur approchée de α à 0,01 près :

```
from pylab import *
def f(x):
    return (x**3+2*x**2-1)/(x**2-1)

u=-5
v=-1.05
c=(u+v)/2
while v-u>.01:
    if f(u)*f(c)<0:
        ...
    else:
        ...
    c=...
print(c)
```

Le script renvoie $\alpha \approx -1,617$.

11. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
12. Construire $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 8

Déterminer la convexité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition respectif (ainsi que les éventuels points d'inflexion) puis tracer le graphe de ces fonctions :

$$f : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1 \text{ et } g : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}.$$