CHAPITRE X

SUITES NUMÉRIQUES I
COURS

Objectifs du chapitre

Connaitre le vocabulaire des suites.

Savoir utiliser les suites arithmétiques.

Savoir utiliser les suites géométriques.

Savoir utiliser les suites arithmético-géométriques.

1 Notion de suite

1.1 Généralités

Définition

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
Une **suite numérique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Vocabulaire et Notations :

- On note les éléments de la suite u_n au lieu de $u(n)$.
- (u_n) représente la suite entière alors que u_n représente le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite.
- On dit que u_n est le **terme général** de la suite et que u_0 est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite (u_n).

Ex : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n+1$. Alors

$$u_0 = 0+1 = 1, u_1 = 1+1 = 2, u_2 = 2+1 = 3, u_3 = 3+1 = 4, \dots, u_{10} = 10+1 = 11\dots$$

1.2 Les différentes manières de définir une suite

1.2.1 Par une formule explicite

C'est ce qu'on a fait dans l'exemple précédent. On définit directement u_n en fonction de n. Pour calculer un terme de la suite, il suffit de remplacer dans la formule n par la valeur qui nous intéresse.

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2n$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_{10} et v_{105}.

1.2.2 Par récurrence

Dans ce cas, u_n est défini en fonction des termes précédents $u_{n-1}, u_{n-2} \dots$ Ainsi, on calcule les différents termes de la suite de proche en proche.

Exercice 2

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - 1$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition par récurrence

Définition (Question de cours)

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique de raison r** $\in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant r.

Exercice 3

Montrer que les suites suivantes sont arithmétiques et donner leur raison :

i) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii) $w_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iv) $y_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

v) $z_n = 4n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques importantes !!

Plus généralement, une suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique de raison a et de terme initial b.

2.2 Définition par une formule explicite

Propriété (Question de cours)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = nr + u_0.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{cases} u_1 &= & u_0 + r \\ u_2 &= & u_1 + r \\ u_3 &= & u_2 + r \\ \vdots &= & \vdots \\ u_n &= & u_{n-1} + r \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + \cdots + u_{n-2} + r + u_{n-1} + r$$

Donc on a bien $u_n = nr + u_0$. □

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 12.
Donner la formule explicite de (u_n) puis calculer u_1 et u_6.

Remarques importantes !!

Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où on ne donne pas u_0 mais un autre terme, par exemple, u_3 : $u_n = (n-3)r + u_3$.
Plus généralement, on a pour tout $p \leq n$,

$$u_n = (n-p)r + u_p.$$

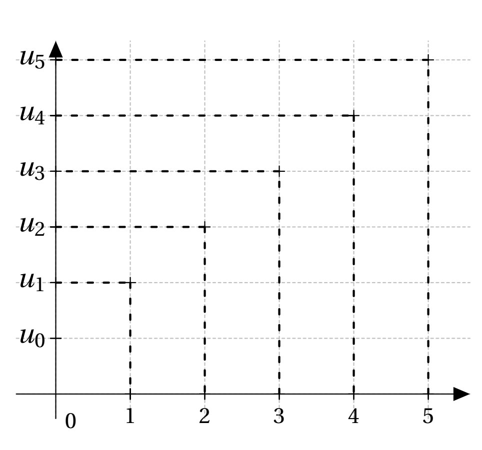
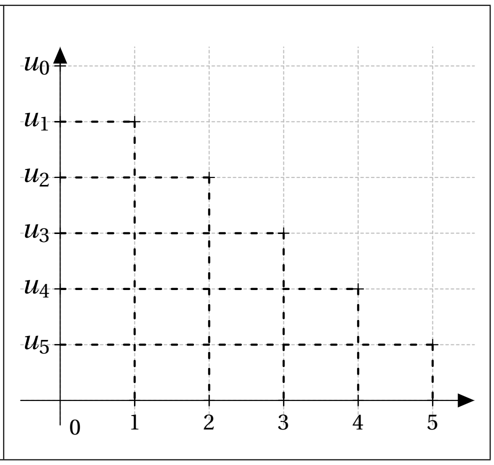
Exercice 5

Calculer u_{14} sachant que (u_n) est arithmétique de raison 2 et $u_6 = 5$.

2.3 Représentation graphique

Propriété

La représentation graphique de la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r est l'ensemble des points de la droite d'équation $y = rx + u_0$ d'abscisse entière.

$r > 0$	$r < 0$
	

2.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété (Question de cours)

1) La somme des entiers naturels de 1 à n est égale à :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Plus généralement, la somme S_n des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}}\text{terme+dernier terme}}{2} = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Exercice 6

Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$.

3 Suite géométrique

3.1 Définition par récurrence

Définition (Question de cours)

On dit qu'une suite (v_n) est une **suite géométrique de raison q** $\in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = qv_n.$$

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} v_3 \xrightarrow{\times q} v_4 \xrightarrow{\times q} \dots$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par q.

Exercice 7

Montrer que les suites suivantes sont géométriques et donner leur raison.

i) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

iii) $w_n = 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Définition par une formule explicite

Propriété (Question de cours)

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial v_0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = q^n \times v_0.$$

Exercice 8 (Exercice de khôlle)

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 2.
Donner la formule explicite de (v_n) puis calculer v_1 et v_6.

Remarques importantes !!

Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où on ne donne pas v_0 mais un autre terme, par exemple, v_3 : $v_n = q^{n-3} \times v_3$.
Plus généralement, on a pour tout $p \leq n$,

$$v_n = q^{n-p} \times v_p.$$

Exercice 9

Calculer v_3 sachant que (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_1 = 4$.

3.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété (Question de cours)

Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La somme des n premières puissances de q est égale à :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2) Plus généralement, la somme S_n des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q est donnée par :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 10

Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n$.
Faire de même pour (w_n) définie par $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

4 Suites arithmético-géométriques

4.1 Définition par récurrence

Définition (Question de cours)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (w_n) est **arithmético-géométrique** si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = aw_n + b.$$

Remarques importantes !!

- Si $a = 1$, alors c'est une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors c'est une suite géométrique de raison a.

4.2 Un exemple

Exercice 11

On s'intéresse au plan de remboursement d'un emprunt de 10 000€ au taux mensuel de $0,25\%$. Pour un entier n, on note R_n le capital restant à rembourser après n mensualités de 800 €.

1. Donner la valeur de R_0.
2. Montrer que pour tout n, $R_{n+1} = 1,0025R_n - 800$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = R_n - 320000$. Montrer que
$$v_{n+1} = 1,0025R_n - 320800.$$
4. Calculer $1,0025v_n$.
5. En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,0025$ et de terme initial $v_0 = -310000$.
6. Donner l'expression explicite de v_n en fonction de n.
7. En déduire que pour tout entier n,
$$R_n = -310000 \times 1,0025^n + 320000.$$

4.3 Définition par une formule explicite

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$. On suppose que $a \neq 1$, sinon la suite (u_n) est arithmétique. Pour étudier une telle suite arithmético-géométrique, on utilise la méthode suivante :

- On déterminer le point fixe, noté α. Pour cela, on résout l'équation $x = ax + b$. On trouve $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
- On considère une suite auxiliaire : $v_n = u_n - \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On montre que (v_n) est géométrique de raison a.
- On exprime v_n en fonction de n puis on en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 12 (Exercice de khôlle)

Déterminer l'expression explicite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.