Devoir Maison n°1
Corrigé

Exercice 1

i) On a $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0.$

ii) Par ailleurs, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}.$

iii) En outre, $\frac{1}{5}\times\frac{15}{7}\times\frac{14}{3}=\frac{1\times3\times5\times7\times2}{5\times7\times3}=2.$

iv) On a $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3-4}{6}}{\frac{3-2}{4}}=\dfrac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{6}\times\frac{4}{1}=-\frac{2}{3}.$

v) Pour ce calcul, on réutilise le précédent : $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{6}}=-\frac{2}{3}\times\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}=-\frac{3}{5}.$

vi) Enfin, $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-1}}{\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{7}}}=\dfrac{\dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{30}}{-\frac{1}{56}}}=\dfrac{\frac{1}{12}\times(-2)}{\frac{1}{30}\times(-56)}=\dfrac{-\frac{1}{6}}{-\frac{28}{15}}=\frac{1}{6}\times\frac{15}{28}=\frac{5}{56}.$

Exercice 2

Par définition, $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $a+b=\frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}=1.$

Par ailleurs, $a^2=\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et de même, $b^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc, on obtient finalement $a^2+b^2=\frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{2}=\frac{6}{2}=3.$

Exercice 3

i) On a $\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$

ii) Donc $2\sqrt{20}-\sqrt{5}+\sqrt{45}=2\times2\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{9\times5}=4\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}=6\sqrt{5}.$

iii) On a $\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}\times\sqrt{15}}{\sqrt{7}\times\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3.$

iv) Enfin, $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2\sqrt{2}+2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{3\sqrt{2}+4}{2-1}=4+3\sqrt{2}.$

Exercice 4

i) On a $2^3\times4^2=2^3\times(2\times2)^2=2^3\times2^2\times2^2=2^{3+2+2}=2^7.$

ii) De manière analogue, $\frac{3^3}{9}=\frac{3^3}{3^2}=3^{3-2}=3^1=3.$

iii) Par ailleurs, $5^5\times25^{-2}=5^5\times5^{-4}=5^{5+(-4)}=5.$

iv) Puis, $6^3\times(-9)^2\times10^{-2}\times35^3=2^3\times3^3\times(-1)^2\times3^4\times2^{-2}\times5^{-2}\times5^3\times7^3=2\times3^7\times5\times7^3.$

v) En outre, $15\times14^3\times6^{-2}\times81^2=3\times5\times2^3\times7^3\times2^{-2}\times3^{-2}\times3^8=2\times3^7\times5\times7^3.$

vi) Enfin, en d'après les questions iv) et v), on a $\frac{6^3\times(-9)^2\times10^{-2}\times35^3}{15\times14^3\times6^{-2}\times81^2}=\frac{2\times3^7\times5\times7^3}{2\times3^7\times5\times7^3}=1.$

Exercice 5

1. i) On a $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$.

   ii) D'où $(x+1)(x-2) - (x-2)^2 = x^2 - x - 2 - (x^2 - 4x + 4) = x^2 - x - 2 - x^2 + 4x - 4 = 3x - 6$.

   iii) Puis, $(x-2)^2 - (2x+1)(x-5) = x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - 10x + x - 5) = x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 9x + 5 = -x^2 + 5x + 9$.

   iv) Enfin, $(x+3)(2x-1)(3x-4) = (2x^2+5x-3)(3x-4) = 6x^3 - 8x^2 + 15x^2 - 20x - 9x + 12 = 6x^3 + 7x^2 - 29x + 12$.

2. i) On a $2x + 3 - (x-1)(2x+3) = (2x+3)\big(1 - (x-1)\big) = (2x+3)(-x+2)$.

   ii) Par ailleurs, $x^2 - (2x-1)^2 = \big(x + (2x-1)\big)\big(x - (2x-1)\big) = (3x-1)(-x+1)$.

   iii) De manière analogue, $x^2 - 1 + (x+1)^2 = (x+1)(x-1) + (x+1)^2 = (x+1)\big(x - 1 + (x+1)\big) = 2x(x+1)$.

   iv) Et enfin, $(4x-8)(3x+1) - (x-2)^2 = 4(x-2)(3x+1) - (x-2)^2 = (x-2)\big(4(3x+1) - (x-2)\big)$,
   Donc $(4x-8)(3x+1) - (x-2)^2 = (x-2)(11x+6)$.

Exercice 6

i) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x + 1 = 5 + \frac{1}{2}x$ si et seulement si $x - \frac{1}{2}x = 5 - 1$ i.e. $\frac{1}{2}x = 4$ i.e. $x = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{2}{1} = 8$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $3x - 1 \geq 2 + 5x$ si et seulement si $-1 - 2 \geq 5x - 3x$ si et seulement si $-3 \geq 2x$ i.e. $-\frac{3}{2} \geq x$ i.e. $x \leq -\frac{3}{2}$.

iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour résoudre cette inégalité, le plus simple est de faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\left(x-1\right)\left(3-2x\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\left(x-1\right)\left(3-2x\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1; \frac{3}{2}\right[$.

iv) L'inégalité est définie dès que $x(3-2x) \neq 0$. Or $x(3-2x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$ donc l'inégalité est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. On a $\dfrac{x^2-1}{x(3-2x)} \leq 0$ si et seulement si $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(3-2x)} \leq 0$.
Là encore, le plus simple est de faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-1}{x(3-2x)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc $\dfrac{x^2-1}{x(3-2x)} \leq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty; -1\right] \cup]0; 1] \cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 7

1. Si $n = 5$, alors $S = 15$ et si $n = 10$, alors $S = 55$.
2. Cet algorithme calcule la somme des premiers entiers inférieurs ou égaux à n : $0+1+2+3+\cdots+n$.
3. On peut également écrire cet algorithme de la manière suivante :

```
Entrées : n un nombre entier
début algorithme
    S ← 0
    k ← 0
    tant que k ≤ n faire
        S ← S + k
        k ← k + 1
    fin tant que
    Afficher la variable S
fin algorithme
```

Exercice 8

Résolvons cette énigme par un tableau :

Alain	Bernard	Charles	David
Blanc (i)	Rouge	Bleu	Vert
Poisson	Chat	Chien	**Lapin** (vi)
Mathématiques	Économie	**Anglais** (v)	Philosophie

Les cases en gras sont celles qui sont données par l'énoncé. Ensuite, pour trouver la couleur préférée de David, on utilise vi) et ii) : il n'aime pas le rouge donc c'est soit le vert, soit le bleu mais s'il aimait le bleu, il aurait un chien donc nécessairement, David aime le vert.
Ensuite, Charles aime donc le bleu ou le rouge, mais s'il aimait le rouge, par iv), sa matière préférée serait l'économie, or par v), on sait qu'il aime l'anglais, donc la couleur préférée de Charles est le bleu. Et donc par ii), il possède un chien.
Il ne reste plus que la couleur rouge pour Bernard et donc il aime l'économie par iv).
Ensuite, par iii), celui qui aime les mathématiques possède un poisson : le seul personnage où les deux lignes correspondantes sont vides est Alain donc nécessairement, Alain aime les mathématiques et possède un poisson.
La seule matière restant pour David est la philosophie et le seul animal possible pour Bernard est le chat.
Ainsi, c'est Bernard qui possède un chat !