Devoir maison n°2
Corrigé

Exercice 1

1) La fonction g est une fonction polynôme de degré deux donc pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, on utilise le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$. Le discriminant est strictement positif, donc g admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1-5}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

D'où $g(x) = (x-(-3))(x-2) = (x+3)(x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour résoudre $g(x) \geq 0$, on dresse le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$.

Exercice 2

i. On calcule tout d'abord le discriminant de $2x^2 - 2x - 12$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 4 + 96 = 100 > 0$ donc $2x^2 - 2x - 12$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{100}}{2\times 2} = \frac{2-10}{4} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{2+10}{4} = 3.$$

Donc $2x^2 - 2x - 12 = 2(x-(-2))(x-3) = 2(x+2)(x-3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii. Ici, on remarque une identité remarquable : $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$ donc on a directement la forme factorisée et $9x^2 + 12x + 4 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{2}{3}$.
Si on ne remarque pas l'identité remarquable, on calcule le discriminant et celui-ci vaut 0 et donc on obtient une racine double et on retrouve la même factorisation.

iii. Enfin, le discriminant de $3x^2 + 3x + 3$ vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 3 < 0$ donc $3x^2 + 3x + 3$ n'admet pas de racine réelle.

Exercice 3

i) On a $(x^3 - x)(3-5x) = x(x^2-1)(3-5x)$. Donc on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x^3-x)(3-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $(x^3 - x)(3-5x) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left[-1; 0\right] \cup \left[\frac{3}{5}; 1\right]$.

ii) On commence tout d'abord par déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation ; pour cela, on résout $x^2+x+1=0$. Le discriminant de x^2+x+1 est strictement négatif ($\Delta=-3$) donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$. Ainsi, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on résout $x^2-4x+3=0$. On trouve un discriminant $\Delta=4$ et deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=3$. On peut alors dresser le tableau de signes de $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x+1}$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	−	0	+	
x^2+x+1		+		+		+	
$\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x+1}$		+	0	−	0	+	

Ainsi, $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x+1}<0$ si et seulement si $x\in\,]1;3[$.

Exercice 4

1. Par définition de P, on a $P(-1)=(-1)^3+5\times(-1)+6=-1-5+6=0$ donc -1 est racine de P. Et donc P se factorise par $\big(x-(-1)\big)=(x+1)$.
2. Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c.$$
Donc par identification, $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$ si et seulement si $\begin{cases} a&=&1\\ b+a&=&0\\ c+b&=&5\\ c&=&6\end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a&=&1\\ b&=&-1\\ c&=&6\end{cases}$.

   Donc finalement, $P(x)=(x+1)(x^2-x+6)$.
3. On peut ensuite essayer de factoriser le polynôme x^2-x+6. Son discriminant vaut $\Delta=(-1)^2-24=-23<0$ donc il n'admet pas de racine. Et donc
4. On en déduit enfin le signe de P :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	
x^2-x+6		+	0	+	
$P(x)$		−	0	+	

Exercice 5

L'algorithme complété peut être :

Entrées : a, b, c trois nombres réels

début algorithme

  si $a == 0$ **alors**

    Afficher Attention, les coefficients ne définissent pas un polynôme de degré 2.

  sinon

    $\Delta = b^2 - 4ac$

    si $\Delta \geq 0$ **alors**

      $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

      $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

      Afficher Les racines sont :

      Afficher la variable x_1

      Afficher la variable x_2

    sinon

      Afficher Ce polynôme a un discriminant négatif donc n'a pas de racine.

    fin si

  fin si

fin algorithme