Devoir maison n°3
Corrigé

Exercice 1

i) Le discriminant de x^2-4x+3 vaut $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4>0$ donc x^2-4x+3 admet deux racines : $x_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2}=3$. Ainsi $x^2-4x+3=0$ si et seulement si $x=1$ ou $x=3$.

ii) Le discriminant de $-2x^2+4x-2$ vaut $\Delta=0$ donc x^2-4x+3 admet une seule racine : $x_0=1$. Ainsi $-2x^2+4x-2=0$ si et seulement si $x=1$.

iii) On a déjà vu que les racines de x^2-4x+3 sont 1 et 3 donc le tableau de signes de x^2-4x+3 est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	−	0	+	

Ainsi $x^2-4x+3>0$ si et seulement si $x\in]-\infty;1[\cup]3,+\infty[$.

iv) Le discriminant de x^2+4x+3 vaut $\Delta=4>0$ donc x^2+4x+3 admet deux racines : $x_1=-3$ et $x_2=-1$. Donc le tableau de signes de x^2+4x+3 est :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x^2+4x+3		+	0	−	0	+	

Ainsi $x^2+4x+3\leq0$ si et seulement si $x\in[-3;-1]$.

v) Le tableau de signes de $(x+1)(x^2-4x+3)$ est :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+		+	
x^2-4x+3		+		+	0	−	0	+	
$(x+1)(x^2-4x+3)$		−	0	+	0	−	0	+	

Ainsi $(x+1)(x^2-4x+3)\geq0$ si et seulement si $x\in[-1;1]\cup[3,+\infty[$.

vi) Les valeurs interdites de $\dfrac{x}{x+3}$ et $\dfrac{1}{x-1}$ sont $\{-3;1\}$.
Puis $\dfrac{x}{x+3}\leq\dfrac{1}{x-1}$ si et seulement si $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}\leq0$ i.e. $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-1)}\leq0$. On calcule le discriminant de x^2-2x-3 : $\Delta=16>0$ donc x^2-2x-3 admet deux racines : $x_1=-1$ et $x_2=3$. Par suite, on obtient le tableau de signes de $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-1)}$:

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+		+	0	−		−	0	+	
$x+3$		−	0	+		+		+		+	
$x-1$		−		−		−	0	+		+	
$\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-1)}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

Ainsi $\dfrac{x}{x+3}\leq\dfrac{1}{x-1}$ si et seulement si $x\in]-3;-1]\cup]1,3]$.

Exercice 2

1. Par définition de P, on a $P(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 11 \times 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ donc 2 est racine de P. Et donc P se factorise par $\left(x-2\right)$.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

Donc par identification, $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$ si et seulement si $\begin{cases} a &= 1 \\ b-2a &= -6 \\ c-2b &= 11 \\ -2c &= -6 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c &= 3 \end{cases}$.

Donc finalement, $P(x) = (x-2)(x^2-4x+3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On peut ensuite essayer de factoriser le polynôme x^2-4x+3. Son discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ donc il admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = 1$.

Ainsi, on peut écrire $P(x) = (x-2)(x-3)(x-1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. On en déduit enfin le signe de P :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3

i) Son taux de croissance sur deux ans est donné par $(1,05)^2 = 1,1025$ i.e. un taux de croissance de $10,25\%$.

ii) Ici, le plus simple est de faire un tableau à double entrée :

	Français	Étrangers	Total
Anglais compris	4	30	34
Anglais pas compris	16	0	16
Total	20	30	50

Donc 34 personnes vont comprendre le guide.

iii) Ici encore, pour traduire la situation, on fait un tableau à double entrée :

	Test +	Test -	Total
Seuil dépassé	4	1	5
Seuil pas dépassé	2	93	95
Total	6	94	100

1. 5 personnes sont au dessus du seuil.
2. 2 personnes sont sobres mais ont un test positif.
3. 1 personne a dépassé le seuil mais a un test négatif.
4. Et finalement, 95+94-93=96 personnes sont sobres ou ont un test négatif.

Exercice 4

Les dés étant équilibrés, on est en situation d'équiprobabilité. Le nombre total de tirages est $6 \times 6 = 36$.

1. Il y a un seul tirage avec deux fois le chiffre 1 donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{36}$.
   Il y a 2 tirages avec les chiffres 1 et 6
   donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$. Enfin, le chiffre 6 peut être en première ou en deuxième position, une fois choisie la place du 6, on a 5 possibilités pour l'autre chiffre donc il y a dix tirages avec exactement une fois le chiffre 6 d'où $\mathbb{P}(C) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
2. On note D l'évènement "*Obtenir au moins une fois le chiffre 6*". Alors $\overline{D}$ est l'évènement "*Ne pas obtenir le chiffre 6*". Donc $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{11}{36}$.
3. On note E l'évènement "*Obtenir deux fois le même chiffre*". On a vu que la probabilité d'obtenir deux fois le chiffre 1 vaut $\dfrac{1}{36}$. Il en est de même pour les autres numéros donc $\mathbb{P}(E) = 6 \times \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6}$.