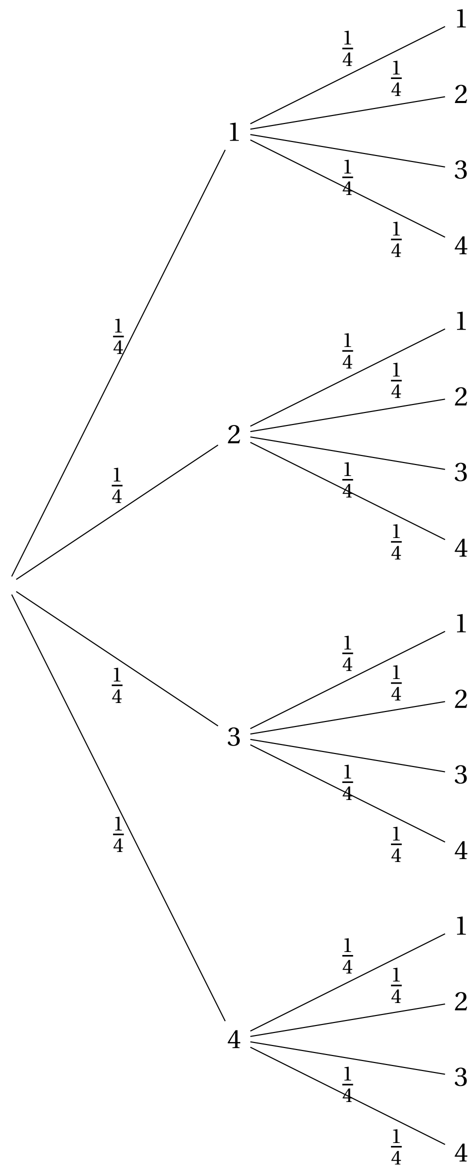
Devoir maison n°4
Corrigé

Exercice 1

On peut représenter la situation par un arbre :



1. a) On note A l'évènement "*Obtenir deux fois le chiffre 4*". Il y a un seul tirage avec deux fois le chiffre 4 donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.

   b) On note B l'évènement "*Obtenir les chiffres 1 et 4*". Il y a 2 tirages avec les chiffres 1 et 4 donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

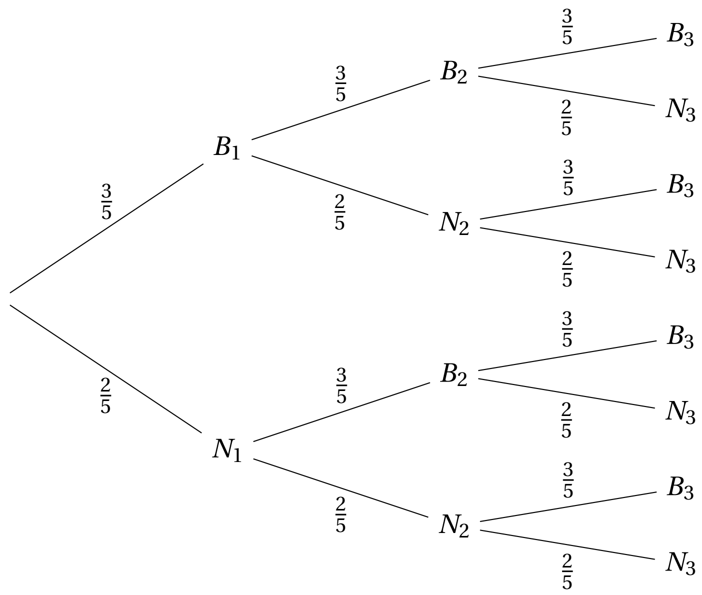
   c) On note C l'évènement "*Obtenir exactement une fois le chiffre 4.* Il y a 6 branches dans l'arbre avec une fois le chiffre 4 donc $\mathbb{P}(C) = 6 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

2. On note D l'évènement "*Obtenir au moins une fois le chiffre 1*". Alors $\overline{D}$ est l'évènement "*Ne pas obtenir le chiffre 1*". Donc $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{16}$.

3. On note E l'évènement "*Obtenir deux fois le même chiffre*". On a vu que la probabilité d'obtenir deux fois le chiffre 4 vaut $\dfrac{1}{16}$ donc $\mathbb{P}(E) = 4 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

On peut représenter la situation par un arbre :



où on a posé B_i (resp. N_i) l'évènement "On obtient une boule blanche (resp. noire) au $i^{\text{ième}}$ tirage".

1. On cherche $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{125}$.

   Puis on cherche $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{54}{125}$.

2. On note B^+ l'évènement "*Obtenir au moins une boule blanche*". Alors $\overline{B^+}$ est l'évènement $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ donc $\mathbb{P}(B^+) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{117}{125}$.

3. Enfin, on note $2C$ l'évènement "*Obtenir les deux couleurs*". Or $\overline{2C} = (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. D'où $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{27}{125}$

   Donc $\mathbb{P}(2C) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{2C}\right) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 1 - \dfrac{8}{125} - \dfrac{27}{125} = \dfrac{90}{125} = \dfrac{18}{25}$.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini si et seulement si $x + 1 \neq 0$. Or $x + 1 = 0$ si et seulement si $x = -1$ donc la fonction f est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.

2. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax(x+1) + b(x+1) + c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (b+a)x + c + b}{x+1}$.

   Donc $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 3 \\ c + b = 4 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

   Ainsi, $f(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x+1}$ pour tout $x \neq -1$.

3. On a $f(1) = \dfrac{1+3+4}{1+1} = 4$ donc $(1;4) \in \mathscr{C}_f$.

4. Pour déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, il faut déterminer le signe de $f(x)-(x+2)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$. Or $f(x)-(x+2)=\dfrac{2}{x+1}$ d'après la question précédente. On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
2	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\dfrac{2}{x+1}$	$-$	$\|$	$+$

Donc pour tout $x \in]-\infty;-1[$,
$f(x)-(x+2) \leq 0$ et $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de Δ sur $]-\infty;-1[$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x)-(x+2) \geq 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $]-1;+\infty[$.

5. Pour montrer que f est minorée par 3 sur $]-1;+\infty[$, intéressons-nous au signe de $f(x)-3$. Or pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x)-3=\dfrac{x^2+3x+4}{x+1}-3=\dfrac{x^2+3x+4-3(x+1)}{x+1}=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x^2+1	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2+1}{x+1}$	$-$	$\|$	$+$

Donc $f(x)-3>0$ et par suite, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) \geq 3$. Autrement dit, f est minorée par 3 sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 4

1. Soit $y \in [0;1]$. On cherche à résoudre l'équation $f(x)=y$ d'inconnue x sur $[-1;0]$.
On a $f(x)=y$ si et seulement si $\sqrt{1-x^2}=y$ i.e. $1-x^2=y^2$ car $y \geq 0$ i.e. $x^2=1-y^2$. Comme $y \in [0;1]$, $1-y^2 \geq 0$ donc $f(x)=y$ si et seulement si $x=\sqrt{1-y^2}$ ou $x=-\sqrt{1-y^2}$. Mais comme $x \in [-1;0]$, nécessairement $x=-\sqrt{1-y^2}$. Donc l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution sur $[-1;0]$ donc f est bijective et pour tout $y \in [1;0]$, $f^{-1}(y)=-\sqrt{1-y^2}$.
2. On pose $u(x)=\sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $v(x)=1-x^2$ pour tout $x \in [-1;0]$. Alors pour tout $x \in [-1;0]$, $(u \circ v)(x)=u\big(v(x)\big)=\sqrt{1-x^2}=f(x)$. Donc $f=u \circ v$.