Programme de khôlles de mathématiques - ECT 1
Semaines 15 et 16 : 02 Février - 06 Février + 23 Février - 27 Février 2026

- **Chapitre 8 : Probabilité conditionnelles**
  Définition, formule des probabilités totales, formule de Bayes, formule des probabilités composées, indépendance de deux évènements.

- **Chapitre 9 : Dérivabilité**
  Définition de la dérivabilité en un point, sur un intervalle, fonction dérivée.
  Stabilité, dérivées successives.
  Équation de la tangente en un point.
  Lien entre dérivée et variations, extrema locaux.
  Convexité.

Questions de cours (vous pouvez choisir un ou deux points de la liste suivante) :

∗ On considère Ω un univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de Ω tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité (conditionnelle) de A sachant B** est le nombre

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

C'est la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est lui-même réalisé.

∗ Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. On a

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

∗ Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements de l'univers Ω, constitué d'évenements de probabilité non nulle et A un événement de Ω.

1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A_1) + \mathbb{P}(A \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap A_n)$.
2) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(A) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A)$.

∗ Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ des événements de l'univers Ω. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

∗ L'équation de la tangente à la courbe de f au point a est donnée par

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k, \quad k$ cte	$x \mapsto 0$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	sur $\mathbb{R}$
* $x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

$*$ Soit u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée	Remarque
$u+v$	$u'+v'$	
ku, k cte	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
$\dfrac{1}{v^n}$	$-\dfrac{nv'}{v^{n+1}}$	$v(x) \neq 0$

* Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  1) f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
  2) f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
  3) f est constante si et seulement si $f' = 0$.
* On suppose que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante si et seulement si $f'' \geq 0$.

Exercices de khôlles :

Exercice 1

Une urne contient trois boules blanches et cinq noires. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. On note pour tout $1 \leq k \leq 3$, B_k l'événement "*la $k^{ième}$ boule est blanche*".

1. Calculer $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche lors du deuxième tirage.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage sachant que la deuxième est blanche.
4. On considère l'événement A : "*on obtient trois boules blanches*". Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 2

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile. On a constaté que :

- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule de ce parc, la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de $\frac{2}{3}$.
- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de $\frac{1}{2}$.
- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de $\frac{3}{4}$.

On choisit une voiture du parc au hasard et on note :

F : "*Le véhicule présente un défaut de freinage*".

E : "*Le véhicule présente un défaut d'éclairage*".

1. Résumer cette étude par un arbre.
2. Déterminer la probabilité qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage.
3. Déterminer la probabilité qu'un véhicule présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage.

Exercice 3

D'après une enquête de l'INSEE, la population active en France comprend 52% de femmes. Le taux de chômage chez les hommes est de 8,4% et il est de 8,5% chez les femmes. On choisit au hasard une personne parmi les actifs. On note H, F et C les évènements "*être un homme*", "*être une femme*" et "*être au chômage*".

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit au chômage ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une femme sachant qu'elle est au chômage ?

Exercice 4

Dans une population, 10% des individus sont atteints de la maladie a. Parmi les individus atteints de cette maladie, 20% ont une maladie b et alors que seulement 4% des non porteurs de la maladie a sont atteints de la maladie b. On choisit au hasard une personne dans cette population et on considère les évènements suivants :
A : "*l'individu est atteint de la maladie a*" et B : "*l'individu est atteint de la maladie b*".

1. Traduire sous forme d'arbre les données de l'énoncé.
2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
3. Déterminer la probabilité que l'individu ait la maladie a sachant qu'il est atteint de la maladie b.

Remarques :

- Pour les probabilités conditionnelles, l'utilisation d'un arbre ne peut pas faire office de preuve. Par exemple, pour la formule des probabilités totales, il faut demander aux étudiants une rédaction soigneuse avec le système complet d'évènements utilisé et la formule littérale avant de passer à l'application numérique.
- Nous avons maintenant tous les outils pour étudier une fonction donc n'hésitez pas à donner un exercice consistant, par exemple avec une fonction rationnelle : recherche de l'ensemble de définition, limites, asymptote, dérivée, variations, l'équation d'une tangente et graphe.

Prochaine quinzaine : 02 Mars - 06 Mars + 16 Mars - 20 Mars : Dérivabilité+suites.