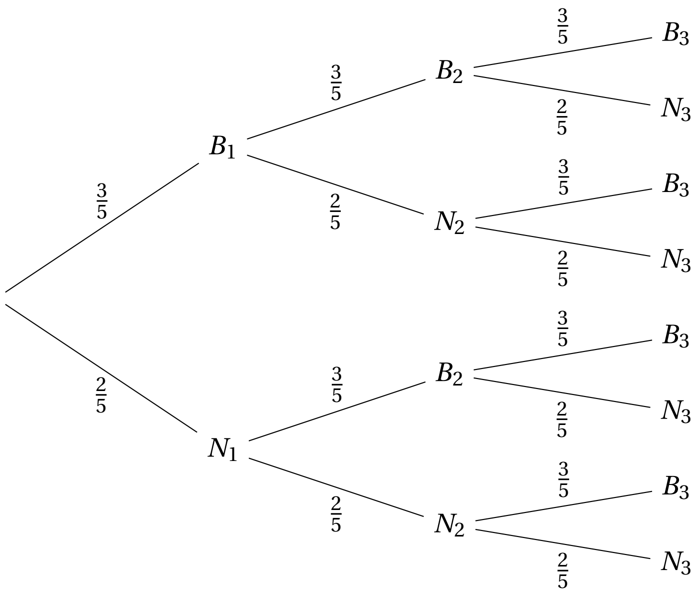
Devoir maison n°5
Corrigé

Exercice 1

Les boules étant indiscernables, on est en situation d'équiprobabilité.

1. On peut résumer la situation par un arbre :



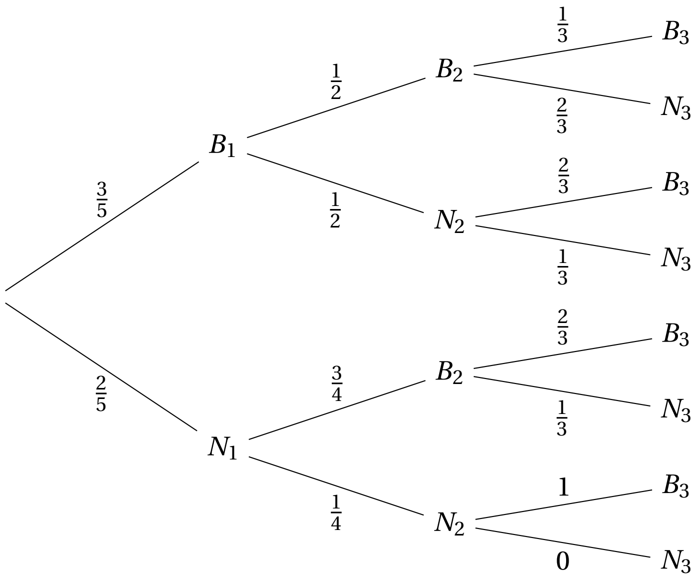
a) On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{27}{125}$.
On peut raisonner également en comptant le nombre de tirages avec trois boules blanches : à chaque tirage, il y a trois boules blanches dans l'urne donc $3 \times 3 \times 3 = 27$ tirages avec trois boules blanches et il y a en tout $5 \times 5 \times 5 = 125$ tirages donc $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$.

b) On a $\mathbb{P}(N_3) = \dfrac{2}{5}$ puisqu'au dernier tirage, il y a deux boules noires sur cinq.
Là encore, on peut raisonner en termes de nombre de tirages : on peut obtenir lors des premier et deuxième tirages n'importe quelle couleur soit $5 \times 5 \times 2$ tirages. D'où $\mathbb{P}(N_3) = \dfrac{5^2 \times 2}{5^3} = \dfrac{2}{5}$.

c) On pose C : "*On obtient exactement deux boules noires*".
On a $C = (N_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap N_3)$ d'où $\mathbb{P}(C) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{36}{125}$.

d) Le contraire d'"*obtenir au moins une boule blanche*" est "*obtenir trois boules noires*".
Or $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{125}$ donc la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche vaut $1 - \dfrac{8}{125} = \dfrac{117}{125}$.

2. À présent les tirages se font sans remise. Donc la situation peut être représentée par l'arbre suivant :



a) On a $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.

b) On cherche $\mathbb{P}(N_3)$. Or on a

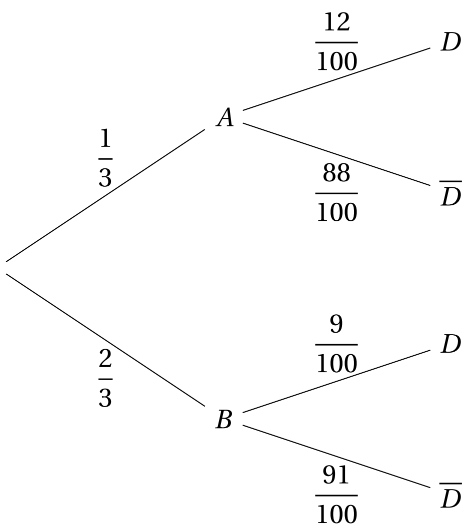
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_3) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 0 \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

c) On a toujours $C = (N_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap N_3)$ d'où
$\mathbb{P}(C) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

d) Le contraire d'"*obtenir au moins une boule blanche*" est "*obtenir trois boules noires*".
Or ici $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 0$ donc on est sûr d'obtenir au moins une boule blanche donc la probabilité d'en obtenir au moins une vaut 1.

Exercice 2

On peut commencer par représenter la situation par un arbre :



1. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathbb{P}_A(D)=\frac{12}{100}$ et $\mathbb{P}_B(D)=\frac{9}{100}$.
2. A et B forment un système complet d'évènements donc par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(D)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(D)=\frac{1}{3}\times\frac{12}{100}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{100}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$.
3. On cherche $\mathbb{P}_D(A)=\dfrac{\mathbb{P}_A(D)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{12}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{25}\times 10=\frac{2}{5}$.

Exercice 3

1. $f(x)$ est définie dès que $x+1\neq 0$; or $x+1=0$ si et seulement si $x=-1$ donc l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. Soit $x\neq -1$. On a $ax+b+\dfrac{c}{x+1}=\dfrac{ax(x+1)+b(x+1)+c}{x+1}=\dfrac{ax^2+(b+a)x+c+b}{x+1}$.

   Donc $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ si et seulement si $\begin{cases} a=1\\ b+a=-1\\ c+b=-1\end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a=1\\ b=-1-a=-2\\ c=-1-b=1\end{cases}$

   Ainsi, pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$.
3. La fonction f est une fonction rationnelle donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-1}x^2-x-1=1$ et $\lim\limits_{x\to-1}x+1=0$ donc on a besoin du tableau de signes de $\dfrac{1}{x+1}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$	‖	$+$

   Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty$. Ainsi, la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
4. D'après la question 2), $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$ pour tout $x\neq-1$, donc $f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ donc la droite Δ d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. De même, Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$.

   Par ailleurs, pour tout $x\neq-1$, $f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$ donc en utilisant le tableau de signes de $\dfrac{1}{x+1}$, on obtient que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de Δ sur $]-\infty;-1[$ et au-dessus sur $]-1;+\infty[$.
5. Le tableau de variations de f est le suivant :

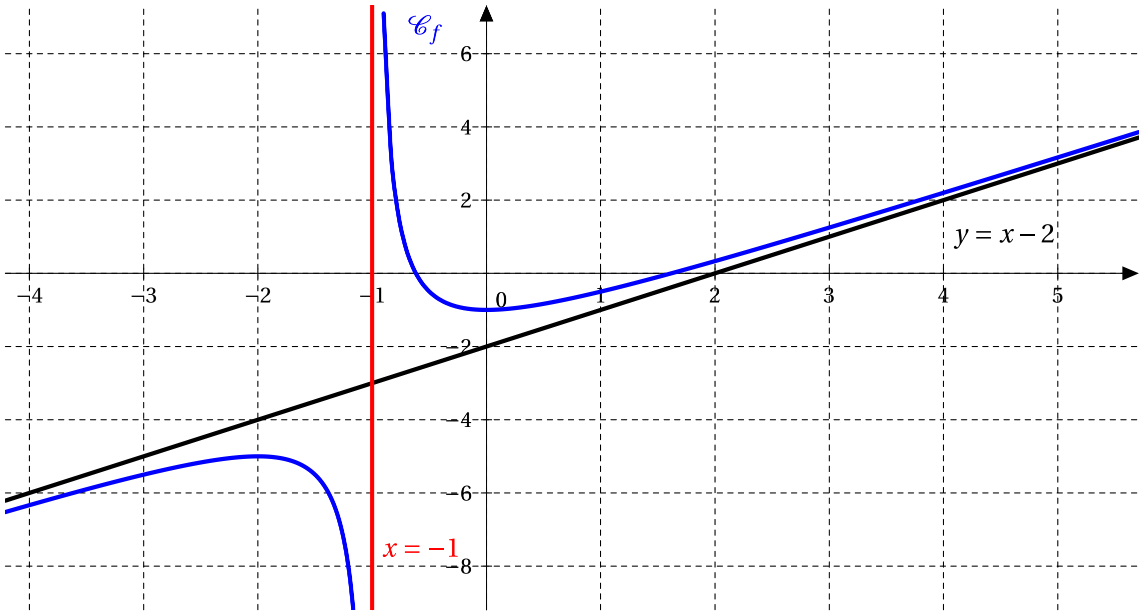
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	-5	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ -1	↗ $+\infty$

   En effet, $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-(-2)-1}{-2+1}=-5$ et $f(0)=\dfrac{0^2-0-1}{0+1}=-1$.
6. On a à résoudre $f(x)=0$. Or $f(x)=0$ si et seulement si $x^2-x-1=0$. Mais le discriminant de x^2-x-1 vaut $(-1)^2-4\times1\times(-1)=5>0$ donc $x^2-x+1=0$ si et seulement si $x=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.

7. a) Pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f(x) \leq -5$ donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur $]-\infty;-1[$.
Par ailleurs, sur $]-1;0]$, la fonction f est continue et strictement décroissante, à valeurs dans $[-1;+\infty[$. Or $1 \in [-1;+\infty[$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $]-1;0]$, notée α.
Enfin, sur $[0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante, à valeurs dans $[-1;+\infty[$. Or $1 \in [-1;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$, notée β.
Ainsi, l'équation $f(x)) = 1$ admet deux solutions : $\alpha \in]-1;0]$ et $\beta \in [0;+\infty[$. On a donc bien $\alpha < \beta$.

b) On a $f(2) = \dfrac{2^2-2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3} < 1$ et $f(3) = \dfrac{3^2-3-1}{3+1} = \dfrac{5}{4} > 1$ donc nécessairement $2 < \beta < 3$.

8. La courbe de f est donnée par :



Exercice 4

i) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

ii) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

iii) Enfin, $\lim\limits_{x\to 2} x^2+3x+2 = 12$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$ donc on tombe sur une forme indéterminée, qu'on lève avec le tableau de signes de $\dfrac{12}{x-2}$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\dfrac{12}{x-2}$	$-$	||	$+$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{x^2+3x+2}{x-2} = +\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 2} x^2-3x+2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$ donc on tombe sur une forme indéterminée mais $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$ donc $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = x-1$ et par suite, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x-1 = 1$.