

Devoir Maison n°6
À rendre pour le Lundi 23 Février 2026

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. On pose $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

1. Déterminer \mathcal{D}_f , l'ensemble de définition de f .
2. Donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer a , puis calculer $f(x) - ax$ et déterminer b .
4. Déterminer un réel c tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) - ax - b = \frac{c}{x+1}$.
5. Prouver que \mathcal{C}_f admet une asymptote \mathcal{D} en $+\infty$, dont on donnera une équation.
6. Déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{D} .

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+2}$.

1. Déterminer \mathcal{D}_f , l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
4. En déduire que \mathcal{C}_f , le graphe de f admet une asymptote Δ en $+\infty$ et $-\infty$, dont on précisera une équation.
5. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers -2 .
Que peut-on en déduire sur \mathcal{C}_f ?
6. Étudier la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à Δ .
7. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$.
En déduire le tableau de variations de f .
8. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions, notées α et β telles que $\alpha < \beta$.
9. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f ainsi que ses asymptotes.

Exercice 3

Le standard téléphonique d'un service après-vente reçoit deux types d'appels : les appels concernant le petit électroménager et ceux concernant les appareils audio et vidéo.

Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les événements suivants :

E : "L'appel concerne le petit électroménager",

A : "L'appel concerne les appareils audio ou vidéo",

T : "Le problème posé se résout par téléphone".

Par ailleurs, des études statistiques ont permis d'établir que :

- (H1) Le standard reçoit 20% d'appels concernant le petit électroménager et 80% d'appels concernant les appareils audio et vidéo.
- (H2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité que le problème soit résolu par téléphone est de 0,5.
- (H3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio ou vidéo, la probabilité que le problème soit résolu par téléphone est de 0,375.

On supposera enfin que les appels sont indépendants les uns des autres.

1. Traduire les données (H1), (H2) et (H3) en termes de probabilités.
2. Montrer que $\mathbb{P}(T) = 0,4$.
3. On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu par téléphone. Calculer la probabilité que le problème concerne le petit électroménager.