**Concours blanc n°1**
**Corrigé (60 points)**

## Exercice 1 (18 points)

1. i) On a $(x+1)^2 = x^2+2x+1$.**($)**

   ii) Puis, $(x+1)^3 = (x^2+2x+1)(x+1) = x^2+3x^2+3x+1$.**($)**

   iii) On a
$$\begin{aligned}(x+1)^3-(x+2)(x-3)(1-2x) &= x^3+3x^2+3x+1-(x^2-x-6)(1-2x)\\ &= x^3+3x^2+3x+1-(x^2-2x^3-x+2x^2-6+12x)\textbf{(\$)}\\ &= x^3+3x^2+3x+1+2x^3-3x^2-11x+6\\ &= 3x^3-8x+7.\textbf{(\$)}\end{aligned}$$

2. i) On a
$$\begin{aligned}(x-1)^2-(2-x)(x-1) &= (x-1)\Big((x-1)-(2-x)\Big) \quad \textbf{(1/2\$)}\\ &= (x-1)\,(x-1-2+x)\\ &= (x-1)(2x-3) \quad \textbf{(1/2\$)}\end{aligned}$$

   ii) Enfin
$$\begin{aligned}(x^2-4)(x+3)-(x-2)(x+1) &= (x-2)(x+2)(x+3)-(x-2)(x+1) \quad \textbf{(1/2\$)}\\ &= (x-2)\Big((x+2)(x+3)-(x+1)\Big)\\ &= (x-2)(x^2+5x+6-x-1)\\ &= (x-2)(x^2+4x+5). \quad \textbf{(1/2\$)}\end{aligned}$$

   Le discriminant de $x^2+4x+5$ vaut $\Delta = 4^2-4\times1\times5 = -4 < 0$ donc on ne peut pas factoriser plus l'expression.

3. i) Pour résoudre $2x^2-x-1=0$, on calcule le discriminant de $2x^2-x-1$ : $\Delta = (-1)^2-4\times2\times(-1) = 1+8 = 9 > 0$.**($)** Donc l'équation admet deux solutions :
$$x_1 = \frac{-(-1)+3}{2\times2} = 1 \quad \textbf{(1/2\$)} \quad \text{et } x_2 = \frac{-(-1)-3}{4} = -\frac{1}{2}. \quad \textbf{(1/2\$)}$$
   Ainsi, $2x^2-x-1=0$ si et seulement si $x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

   ii) Pour résoudre $2x^2+4x-6 \leq 0$, commençons par déterminer les racines de $2x^2+4x-6$ : le discriminant vaut $\Delta = 64 > 0$, donc $2x^2+4x-6$ admet deux racines : $x_1 = \frac{-4-8}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-4+8}{4} = 1$.**($)**
   On obtient alors le tableau de signes de $2x^2+4x-6$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+4x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   **($)pour le tableau**
   Ainsi, $2x^2+4x-6 \leq 0$ si et seulement si $x \in [-3;1]$ **($)pour l'intervalle et les crochets** .

   iii) On a $(x^2-x)(2x^2-5x+2) = x(x-1)(2x^2-5x+2)$. Le discriminant de $2x^2-5x+2$ vaut $\Delta = 9$ et donc $2x^2-5x+2$ admet deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.**($)** On peut alors dresser le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x^2-5x+2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x^2-x)(2x^2-5x+2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**($)pour le tableau**
Donc $(x^2-x)(2x^2-5x+2)<0$ si et seulement si $x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[ \cup ]1;2[$.**($)pour l'intervalle et les crochets**

iv) Déterminons tout d'abord l'ensemble de définition de $\frac{2x^2-5x+2}{x^2+3x+2}$. **(1/2$)** Pour cela, il faut déterminer les racines de $x^2+3x+2$. Or son discriminant vaut $9-8=1$ donc $x^2+3x+2$ admet deux racines : $-2$ et $-1$.**($)** Donc l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$. **(1/2$)**
Par ailleurs, $2x^2-5x+2=0$ si et seulement si $x=\frac{1}{2}$ ou $x=2$ (d'après la question précédente). On obtient alors le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-5x+2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+3x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{2x^2-5x+2}{x^2+3x+2}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**($)pour le tableau**
D'où $\frac{2x^2-5x+2}{x^2+3x+2} \geq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty;-2\right[ \cup \left]-1;\frac{1}{2}\right] \cup \left[2;+\infty\right[$.**($)pour l'intervalle et les crochets**

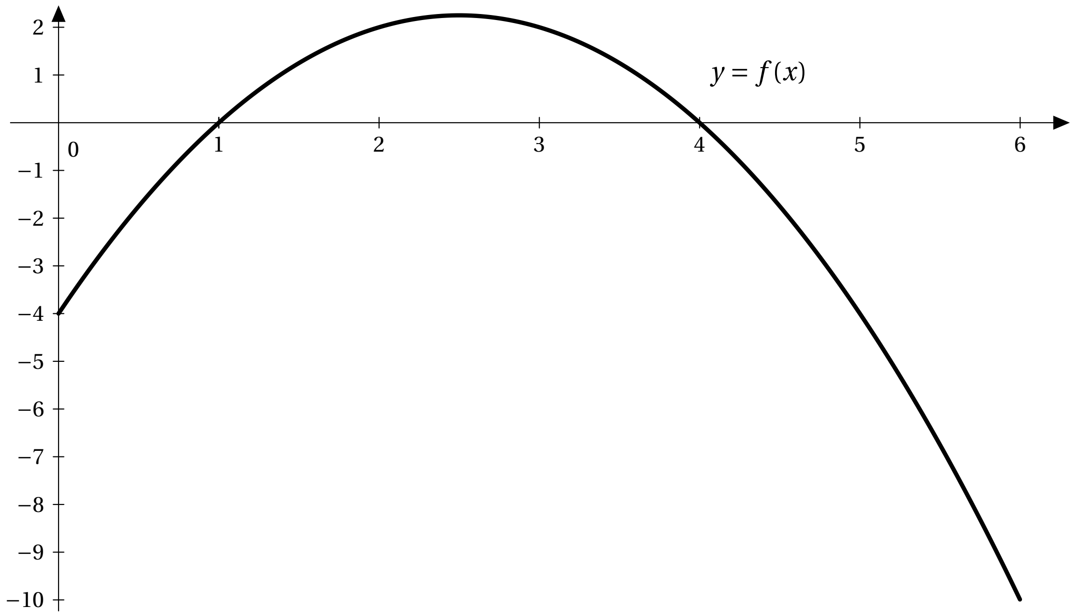
## Exercice 2 (9 points)

1. L'entreprise peut produire entre 0 et 6000 produits donc l'ensemble de définition de $f$ est $\mathscr{D}_f=[0;6]$.**($)**
2. L'entreprise réalise un bénéfice nul lorsque $f(x)=0$**($)** i.e. $-x^2+5x-4=0$. Or le discriminant de $f$ vaut $\Delta=25-16=9>0$ donc $f$ admet deux racines $x_1=\frac{-5-3}{-2}=4$ et $x_2=\frac{-5+3}{-2}=1$.**($)** Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice nul lorsqu'elle vend 1000 objets ou 4000 objets.
3. L'entreprise est bénéficiaire lorsque $f(x)\geq 0$.**($)** Or le tableau de signes de $f$ est donné par :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**($)pour le tableau**
Donc l'entreprise est bénéficiaire si elle vend entre 1000 et 4000 objets.
4. On a $f(1)=0=f(4)$ donc le maximum de $f$ est obtenu en $x=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$,**($)** ce qui représente 2500 objets vendus.
5. Si elle vend 240 objets, le bénéfice réalisé est $f(0,24)<0$ donc l'entreprise perd de l'argent **(1/2$)** ; en revanche, si elle vend 2400, $x=2,4$ et comme $f(2,4)>0$, l'entreprise est bénéficiaire. **(1/2$)**

6. Le graphe obtenu est le suivant :




**($)pour les points (1;0) et (4;0)**
**($)pour l'allure générale**

## Exercice 3 (9 points)

1) Par définition de $P$, $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$.**($)** Donc 1 est racine de $P$ **(1/2$)** et par suite, on peut factoriser $P$ par $(x-1)$. **(1/2$)**

2) On cherche trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Or $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.**($)** Donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = -5 \\ -c = 6 \end{cases}$ **($)** i.e $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + a = -2 + 1 = -1 \\ c = -6 \end{cases}$ **($)**
Ainsi $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$.

3) On cherche à présent à factoriser $x^2 - x - 6$. Or son discriminant vaut 25 donc $x^2 - x - 6$ possède deux racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.**($)** D'où finalement, $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.**($)**

4) On peut alors déduire de la factorisation de $P$ son signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-x-6$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

**($$)pour le tableau**
Ainsi, $P(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-2;1] \cup [3;+\infty[$.

## Exercice 4 (10 points)

### Situation 1

Dans cette première situation, on effectue des tirages successifs avec remises. Les boules étant indiscernables, nous sommes en situation d'équiprobabilité.
La probabilité que la première boule soit blanche est $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$**($)** puisqu'il y a trois boules blanches sur les quatre présentes dans l'urne.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$,**($)** puisqu'à chaque tirage, il faut tirer une des trois boules blanches.

De manière analogue, $\mathbb{P}(C) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$**($)** ; pour obtenir exactement une boule noire, il faut d'abord choisir une position pour la boule noire, soit 3 possibilités, puis la boule noire a une probabilité de sortir égale à $\frac{1}{4}$ et les deux boules blanches ont une probabilité de sortir de $\frac{3}{4}$ chacune.**($)pour l'explication du calcul**

Enfin, $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.**($)** En effet, $\overline{D}$ est l'évènement : "*Obtenir trois boules noires*"
et $\mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.**($)**

### Situation 2

Cette fois, les boules sont tirées simultanément, donc on ne tient plus compte de l'ordre et il n'y a plus répétition. En revanche, nous sommes toujours en situation d'équiprobabilité.

1. Il faut choisir trois boules parmi les quatre présentes dans l'urne donc au total, on a 4 tirages possibles.**($)**
2. Il y a un seul tirage avec les trois boules blanches donc $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.**($)** Il y a trois tirages avec exactement une boule noire donc $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$**($)** et $\mathbb{P}(D) = 1$**($)** car il n'y a pas de tirage sans boule blanche.

## Exercice 5 (7 points)

1. Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$**($)** , $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$**($)** et $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.**($)**
2. Tout d'abord, il faut déterminer $p_2$ et $p_4$. La somme des probabilités étant égale à 1, on peut écrire

$$\frac{1}{24} + p_2 + \frac{1}{24} + p_4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1\textbf{(\$)}$$

i.e. $\frac{3}{4} + 3p_4 = 1$ d'où $p_4 = \frac{1}{12}$ **(1/2$)** et donc $p_2 = \frac{1}{6}$. **(1/2$)**

Donc $\mathbb{P}(A) = p_2 = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$**($)** et $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$**($)** .

**Exercice 6** **(7 points)**

1. La fonction $f$ est définie dès que $x-2\neq 0$ donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.**($)**

2. Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels. On a $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{ax(x-2)+b(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$.**($)**

   Donc $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ si et seulement si $\begin{cases} a=2\\ b-2a=1\\ c-2b=-2\end{cases}$ **($)** i.e $\begin{cases} a=2\\ b=1+2a=5\\ c=-2+2b=8\end{cases}$ .**($)**

   Ainsi $f(x)=2x+5+\dfrac{8}{x-2}$ pour tout $x\in\mathscr{D}_f$.

3. Pour déterminer la position de $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$, il faut déterminer le signe de $f(x)-(2x+5)$**($)** i.e. le signe de $\dfrac{8}{x-2}$ d'après la question précédente. Or le tableau de signes de $\dfrac{8}{x-2}$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{8}{x-2}$ | $-$ | \|\| | $+$ |

   **($)pour le tableau**

   Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\Delta$ sur $]-\infty;2[$ et au-dessus sur $]2;+\infty[$.**($)**