CHAPITRE II

FONCTIONS LINÉAIRES, FONCTIONS AFFINES
COURS

Objectifs du chapitre

Savoir étudier une fonction affine.

Savoir résoudre une équation de degré 1.

Savoir résoudre une inéquation de degré 1.

1 Fonctions linéaires, fonctions affines

1.1 Définitions

Définition (Question de cours)

Soit a, b deux nombres réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée une **fonction affine**.
Dans le cas particulier où $b = 0$ i.e. si $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est une **fonction linéaire**.
Et dans le cas où $a = 0$, alors $f(x) = b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f est dite **constante**.

Remarques importantes !!

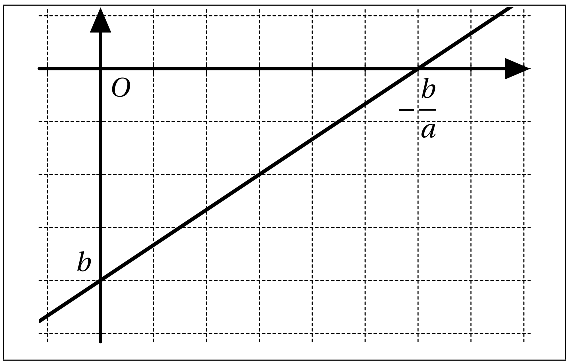
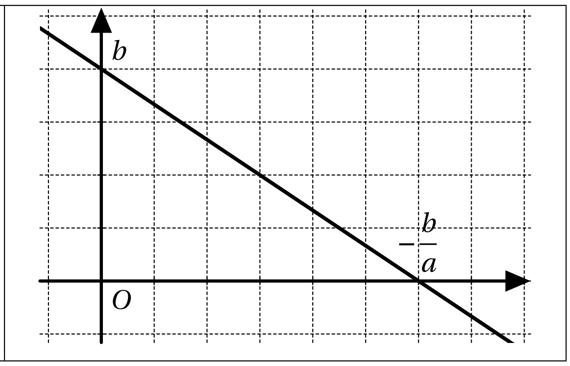
Une fonction affine est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction constante.

Définition

Le réel a s'appelle le **coefficient directeur** et b est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

Théorème

On considère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.
La courbe représentative d'une fonction affine dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une droite.
Dans le cas particulier où la fonction est linéaire, alors la droite passe par O, l'origine du repère.

Cas $a>0$	Cas $a<0$
	

Exercice 1

Tracer les courbes des fonctions suivantes :

$$f(x)=2x, \qquad g(x)=-x+3 \text{ et } h(x)=x.$$

1.2 Lien avec la proportionnalité

- Les fonctions linéaires correspondent à des situations de proportionnalités. En effet si deux grandeurs x et y sont proportionnelles, elles sont liées par un coefficient a tel que $y=ax$.
- En revanche, les fonctions affines non linéaires f ne correspondent pas à des situations de proportionnalité sur les nombres $f(x)$. En revanche, les accroissements des images $f(x)$ sont proportionnels à ceux de la variable x.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction affine si et seulement si l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable ; autrement dit, f est affine si et seulement si la quantité $\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ est constante pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$.
Dans le cas où f est affine, alors $a=\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$

Démonstration.
La propriété à montrer est un "si et seulement si" ; autrement dit, on doit montrer l'équivalence des deux propositions. Pour cela, nous allons d'abord montrer une implication, puis ensuite l'implication réciproque. Tout d'abord, supposons que la fonction f est affine i.e. $f(x)=ax+b$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Soit x, y deux nombres réels. On a $f(x)=ax+b$ et $f(y)=ay+b$ donc $f(y)-f(x)=ay+b-(ax+b)=ay+b-ax-b=a(y-x)$. Donc finalement, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=a.$$

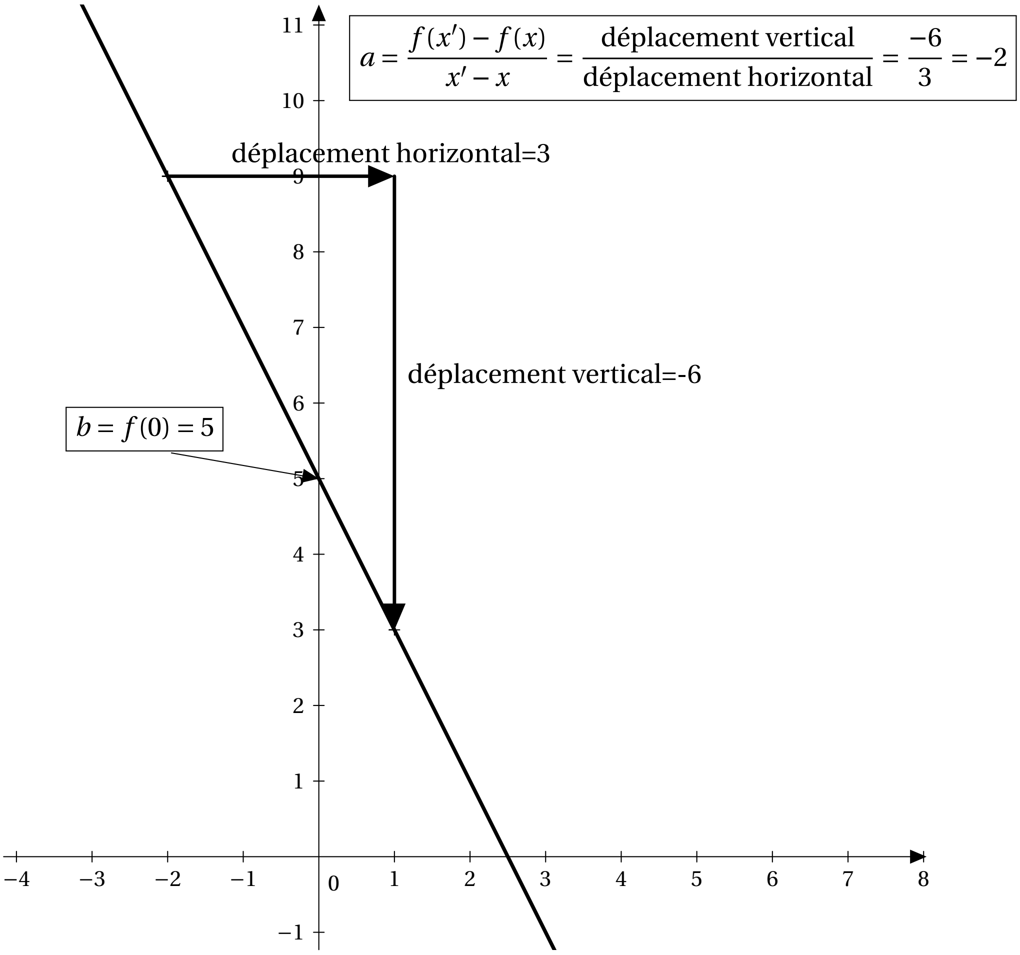
Réciproquement, si le quotient $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est constant pour tout $x, y\in\mathbb{R}$, alors on note a cette constante. En particulier pour $y=0$, on a $\dfrac{f(0)-f(x)}{0-x}=a$ et par suite, on a $f(x)=ax+f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et donc f est affine. □

Exercice 2

Déterminer la fonction affine f telle que $f(1)=3$ et $f(-2)=9$.

1.3 Interprétation graphique de a et b

Reprenons l'exemple précédent :



1.4 Variations d'une fonction affine

Théorème

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante.
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante.
- Si $a = 0$, alors f est constante.

Démonstration.

On suppose $a > 0$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors, $ax < ay$ car $a > 0$ et par suite, $ax + b < ay + b$ i.e. $f(x) < f(y)$. Ainsi f est strictement croissante.

Les cas où a est négatif et nul se traitent de manière analogue et sont laissés en exercice. □

Exercice 3

Déterminer les variations des deux fonctions affines suivantes :

$$f : x \mapsto 2x - 1 \text{ et } g : x \mapsto -x + 1.$$

En toute généralité, le tableau de variations d'une fonction affine f est l'un des suivants :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

1.5 Signe d'une fonction affine

Étudions enfin le signe d'une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$.
- $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \ \Leftrightarrow x > \dfrac{-b}{a}$ si $a > 0$.

$$\Leftrightarrow x < \frac{-b}{a} \text{ si } a < 0.$$

On obtient alors les tableaux de signes suivants :

Cas $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

On peut résumer ces deux tableaux par la propriété suivante :

Propriété (Question de cours)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors le tableau de signes de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe contraire de a	0	signe de a	

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

On considère les deux fonctions affines f et g définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x - 6 \text{ et } g(x) = -x - 3.$$

1. Étudier les variations de f et g puis tracer les courbes représentatives de f et g.
2. Étudier le signe de f et g.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 6 = -x - 3$. Retrouver graphiquement ce résultat.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations $f(x) \geq 0$ et $f(x) < g(x)$ puis retrouver graphiquement le résultat.