Interrogation 1
Corrigé (49 points)

Exercice 1 (24 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$.

1. La fonction f est définie dès que $x-2\neq 0$ donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.**($)**
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}$ **($)** $=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.**($)**
   De manière analogue, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.**($)**
3. Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathscr{D}_f$.
   On a $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{ax(x-2)+b(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$.**($)**
   Donc $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ si et seulement si $\begin{cases} a=1\\ -2a+b=-1\\ -2b+c=-1\end{cases}$ **($)** i.e. $\begin{cases} a=1\\ b=-1+2a=1\\ c=-1+2b=1\end{cases}$.**($)**
   Ainsi, pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.
4. Soit $x\in\mathscr{D}_f$. On a $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-2}$**($)** et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ donc la droite Δ d'équation $y=x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.**($)pour la limite et la conclusion**
   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ donc Δ est également asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. **(0$)pas de point spécifique sauf si cette partie est mieux faite qu'en** $+\infty$
5. Soit $x\in\mathscr{D}_f$. On a $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x-2}$ et le tableau de signes de $\dfrac{1}{x-2}$ est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
1		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1}{x-2}$		$-$	‖	$+$	

($)

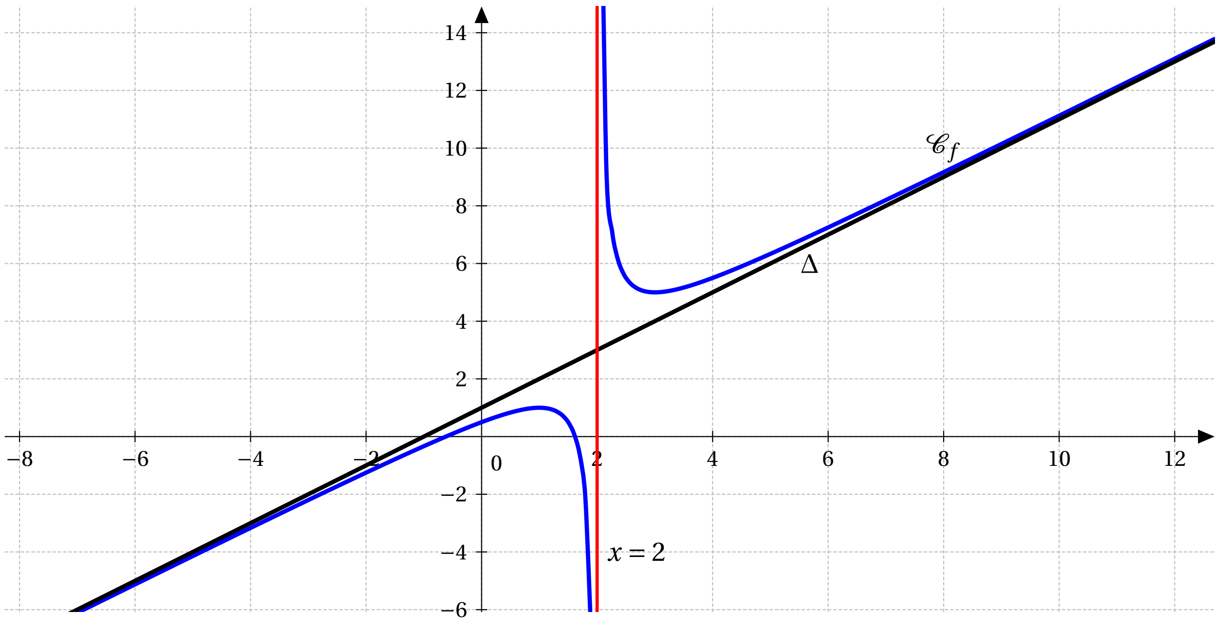
   Donc sur $]-\infty;2[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de Δ et au-dessus sur $]2;+\infty[$.**($)**
6. On a $\lim\limits_{x\to2} x^2-x-1=2^2-2-1=1$ et $\lim\limits_{x\to2} x-2=0$ donc on tombe sur une forme indéterminée**($)** mais en utilisant le tableau de signes précédent, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$. **($$)**
   Donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.**($)**
7. a) On a $f(1)=\dfrac{1^2-1-1}{1-2}=1$ **(1/2$)** et $f(3)=\dfrac{3^2-3-1}{3-2}=5$. **(1/2$)** Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$

b) Pour tout $x \in]-\infty;2[$, $f(x) \leq 1 < 6$ donc l'équation $f(x) = 6$ n'a pas de solution sur $]-\infty;2[$.**($)**
Puis sur $]2;3]$, la fonction f est continue et strictement décroissante**($)**, à valeurs dans $[5;+\infty[$.**($)**
Or $6 \in [5;+\infty[$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $]2;3]$, notée α.**($)**
De manière analogue, f est continue et strictement croissante sur $[3;+\infty[$, à valeurs dans $[5;+\infty[$.
Or $6 \in [5;+\infty[$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[3;+\infty[$, notée β. **(0$)pas de point spécifique sauf si cette partie est mieux faite que la précédente**
Finalement, l'équation $f(x) = 6$ admet deux solutions : $\alpha \in]2;3]$ et $\beta \in [3;+\infty[$.

c) On a $f(4) = \dfrac{11}{2} < 6$ et $f(5) = \dfrac{19}{3} > 6$ donc $\beta \in [4;5]$.**($)**

8. on obtient alors la graphe suivant :



($)pour le tracé des asymptotes
($)pour le fait que $\mathscr{C}_f$ s'approche de ses asymptotes
($)pour l'allure générale de $\mathscr{C}_f$

<u>Exercice 2</u> (9 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.**($)**
2. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 **($)** et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x} = \dfrac{x^2+1}{-x} = -f(x)$.
Donc f est impaire **($)pour le calcul de $f(-x)$ et la conclusion cohérente** et par suite, son graphe est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.**($)**
3. On a $f(-1) = \dfrac{(-1)^2+1}{(-1)} = -2 \neq 2$ donc $\mathscr{C}_f$ ne passe pas par A.**($)**

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) - 2$**($)** $= \dfrac{x^2+1}{x} - 2 = \dfrac{x^2+1-2x}{x} = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.**($)**
Si on ne reconnait pas l'identité remarquable, le discriminant de $x^2 - 2x + 1$ vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0$ donc le polynôme $x^2 - 2x + 1$ admet une unique racine : $x_0 = \dfrac{-(-2)}{2} = 1$. On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$		$+$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-2$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

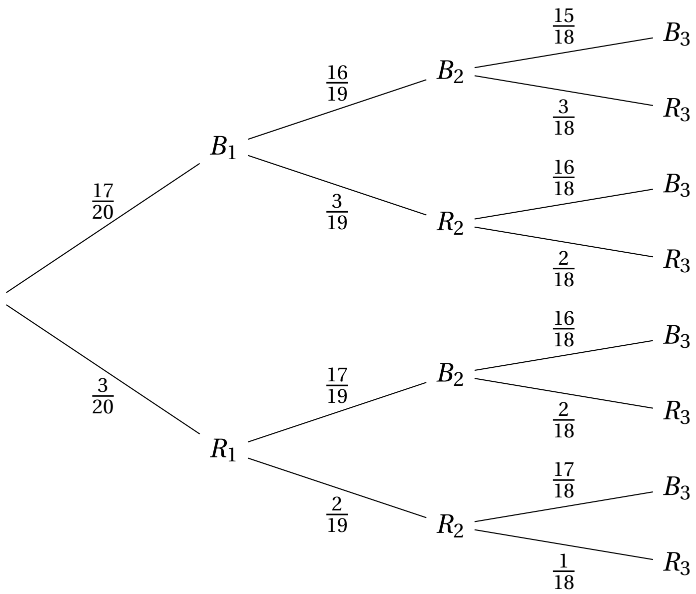
($)

Donc pour tout $x > 0$, $f(x) - 2 \geq 0$ i.e. $f(x) \geq 2$ donc f est bien minorée par 2 sur $]0; +\infty[$. **(0$)si la conclusion n'est pas cohérente avec le tableau**

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 0$ donc si $x \in]-\infty; 0[$, $f(x) \leq 0$ et donc f est majorée par 0 sur $]-\infty; 0[$.**($)**

Exercice 3 (8 points)

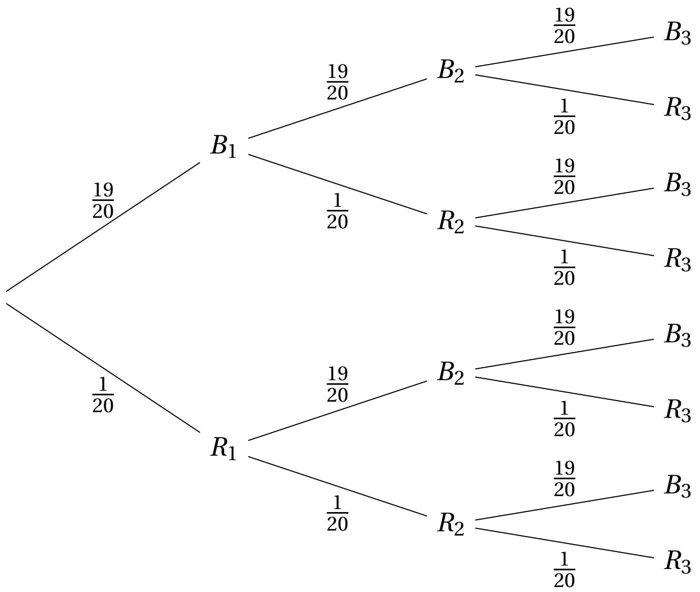
1. On tire trois boules successivement sans remise de l'urne U_1 donc l'arbre correspondant est le suivant :



   a) On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{3}{20} \times \dfrac{2}{19} \times \dfrac{1}{18}$. **($$)une explication est indispensable : cela peut être un arbre ou une phrase**

   b) Le contraire d'obtenir au moins une boule rouge est d'obtenir trois boules blanches.**($)** Or la probabilité d'obtenir trois boules blanches est $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{17}{20} \times \dfrac{16}{19} \times \dfrac{15}{18}$ donc celle d'obtenir au moins une boule rouge vaut $1 - \dfrac{17}{20} \times \dfrac{16}{19} \times \dfrac{15}{18}$.**($)**

2. On peut cette fois traduire la situation par l'arbre suivant :

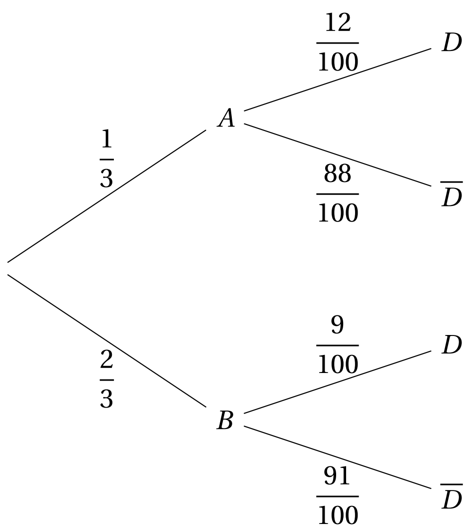


a) On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20}$. **($$)**

b) On peut obtenir trois boules blanches ou trois boules rouges donc la probabilité d'obtenir un tirage unicolore vaut $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} + \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20}$. **($$)**

Exercice 4 **(8 points)**

1. On peut traduire la situation par l'arbre suivant :



($)pour la forme de l'arbre et **($)pour les probabilités sur chaque branche**

2. A et B forment un système complet d'évènements**($)** donc par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(D)$**($)** $= \frac{1}{3} \times \frac{12}{100} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{100} = \frac{4}{100} + \frac{6}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.**($)**

3. On cherche $\mathbb{P}_D(A)$.**($)**

Or par la formule de Bayes, $\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}_A(D)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}$**($)** $= \frac{\frac{12}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{12}{100} \times \frac{1}{3} \times \frac{10}{1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.**($)**