DS n°1
Mercredi 28 Janvier 2026 - Durée : 4h

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Déterminer trois réels tels que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
4. En déduire que la courbe de f, notée $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$, d'équation $y = x + 1$.
5. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
6. Étudier la limite de f en 2. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}_f$?
7. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.
   En déduire le tableau de variations de f.
8. Déterminer une équation de $\mathscr{T}$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
9. a) Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet exactement deux solutions, notées α et β et telles que $\alpha < \beta$.
   b) Justifier que $\beta \in]1;2[$.
10. Tracer l'allure de $\mathscr{T}$, $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_f$?
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe-t-elle par le point A de coordonnées $(-1;2)$?
4. Montrer que f est minorée par 2 sur $]0;+\infty[$.
5. La fonction f est-elle majorée sur $]-\infty;0[$? Justifier votre réponse.

Exercice 3

On considère la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ pour tout réel $x \geq 0$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel positif x. En déduire le tableau de variations de f.
4. Donner une équation de $\mathscr{T}$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Étudier la convexité de la fonction f.
   En déduire, sans calcul, la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.
6. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{T}$.

Exercice 4

Coralie sait que le congélateur de la cuisine renferme quatre bâtons de crème glacée, de quatre parfums différents (vanille, chocolat, pistache, fraise). Gourmande et insomniaque, elle décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur. Les bâtons de glace sont indiscernables au toucher.
Pour $i \in \{1,2\}$, on note V_i (resp. C_i, P_i, F_i) l'évènement "*Le $i^{ième}$ bâton choisi est à la vanille (resp. au chocolat, à la pistache, à la fraise)*".

Ses parfums préférés sont fraise et chocolat. Calculer les probabilités pour qu'elle obtienne :

i) le bâton à la fraise, puis le bâton au chocolat ;

ii) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;

iii) un seul de ses parfums préférés ;

iv) aucun de ses parfums préférés ;

v) au moins un de ses parfums préférés.

Exercice 5

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 20 boules : une rouge et 19 blanches. L'urne U_2 contient 20 boules : 3 rouges et 17 blanches.
On ne cherchera pas à effectuer les calculs ni à les simplifier.

1. On tire trois boules dans l'urne U_1, successivement et avec remise.
   Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on note B_i : "*On tire une boule blanche au $i^{ième}$ tirage*" et R_i : "*On tire une boule rouge au $i^{ième}$ tirage*".
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ?
2. On tire, cette fois, trois boules successivement sans remise de l'urne U_2. On conserve les notations B_i et R_i de la question précédente.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?

Exercice 6

Deux machines m_1 et m_2 d'une usine fabriquent des ampoules. La machine m_1 produit 75% des ampoules. Le taux d'ampoules défectueuses fabriquées par m_1 est de 1% et celui des ampoules fabriquées par m_2 est de 5%. On choisit une ampoule au hasard.
Pour tout $k \in \{1;2\}$, on pose M_k : "*L'ampoule choisie a été fabriquée par la machine m_k*" et on note également D : "*L'ampoule choisie est défectueuse*".

1. Traduire la situation par un arbre.
2. Calculer la probabilité que l'ampoule choisie soit défectueuse.
3. On suppose que l'ampoule choisie est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine m_2 ?