DS 1
Corrigé (75 points)

Exercice 1 (27points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

1. La fonction f est définie dès que $x - 2 \neq 0$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ **($)** .
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. **($)L'égalité $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x}$ est indispensable**
   De manière analogue, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. **($)**
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D}_f$.
   On a $ax + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{ax(x-2) + b(x-2) + c}{x-2} = \dfrac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2} = \dfrac{ax^2 + (-2a+b)x - 2b + c}{x-2}$.**($)**
   Donc $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -1 \\ -2b + c = 2 \end{cases}$ **($)** i.e. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + 2a = 1 \\ c = 2 + 2b = 4 \end{cases}$. **($)**
   Ainsi, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$.
4. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a $f(x) - (x+1) = \dfrac{4}{x-2}$ **($)** et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$ **($)** donc la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x-2} = 0$ donc Δ est également asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
5. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a $f(x) - (x+1) = \dfrac{4}{x-2}$ et le tableau de signes de $\dfrac{4}{x-2}$ est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
4		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4}{x-2}$		$-$	‖	$+$	

   ($)pour le tableau de signes
   Donc sur $]-\infty; 2[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de Δ et au-dessus sur $]2; +\infty[$. **($)**
6. On a $\lim\limits_{x\to2} x^2 - x + 2 = 2^2 - 2 + 2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to2} x - 2 = 0$ **($)** donc on tombe sur une forme indéterminée mais en utilisant le tableau de signes précédent, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$. **($)**
   Donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$. **($)**

7. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-4x-x+2-x^2+x-2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
($)pour obtenir la première égalité de f'
Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-4)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

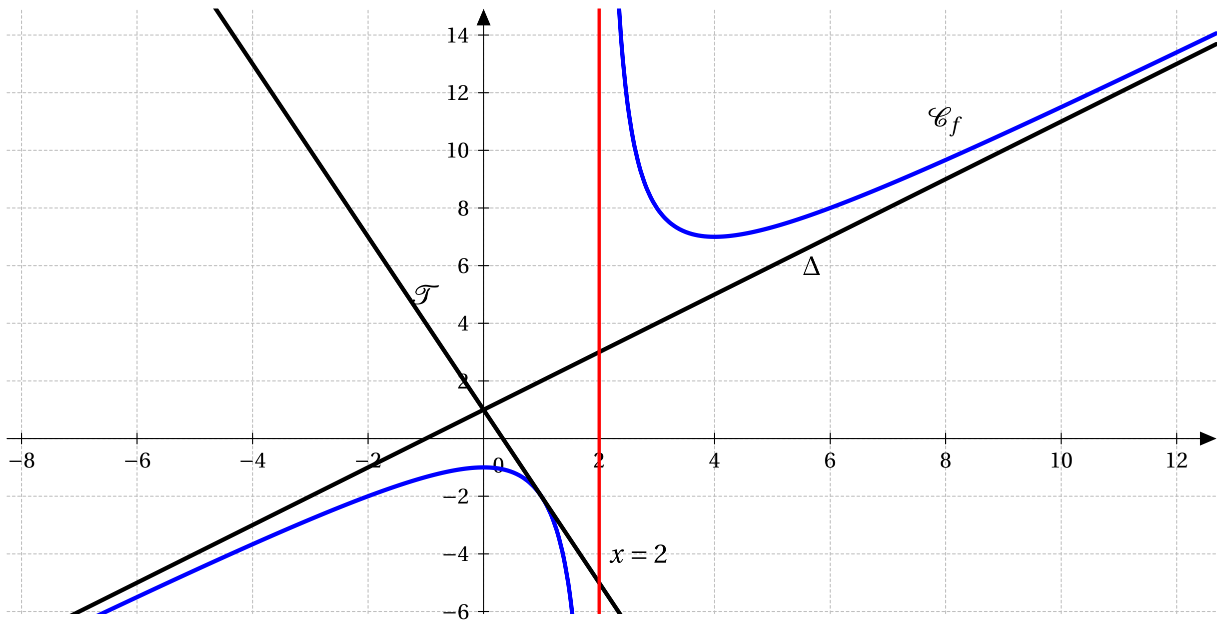
($$)2pts pour un tableau complet avec les limites et les valeurs $f(0)$ et $f(4)$
(0$)si le signe de f' n'est pas justifié

8. Une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.**($)** Or $f'(1) = -3$ et $f(1) = -2$ donc $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -3(x-1)-2 = -3x+1$.**($)**

9. a) Sur $]-\infty;0]$, la fonction f est continue et strictement croissante, **($)** à valeurs dans $]-\infty;-1]$.**($)**
Or $-3 \in]-\infty;-1]$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $]-\infty;0]$, notée α.**($)**
De manière analogue, f est continue et strictement décroissante sur $[0;2[$, à valeurs dans $]-\infty;-1]$.
Or $-3 \in]-\infty;-1]$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $[0;2[$, notée β.
Enfin, pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f(x) \geq 7$ donc l'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution sur $]2;+\infty[$.**($)**
Finalement, l'équation $f(x) = -3$ admet deux solutions : $\alpha \in]-\infty;0]$ et $\beta \in [0;2[$.

   b) On a $f(1) = -2 > -3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ donc $\beta \in]1;2[$.**($)attention aux égalités ou inégalités écrites**

10. on obtient alors la graphe suivant :



($)pour le tracé de Δ
($)pour $\mathscr{T}$ (tracé+tangente) en 1
($)pour les points (0,-1) et (4,7) + extrema locaux
($)pour la cohérence de la courbe

Exercice 2 **(9points)**

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.**($)**
2. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 **($)** et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=\dfrac{x^2+1}{-x}=-f(x)$.**($)**
   Donc f est impaire et par suite, son graphe est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.**($)**
3. On a $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{(-1)}=-2\neq 2$ donc $\mathscr{C}_f$ ne passe pas par A.**($)**
4. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a $f(x)-2=\dfrac{x^2+1}{x}-2=\dfrac{x^2+1-2x}{x}=\dfrac{x^2-2x+1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}$.**($)pour la factorisation qui peut être obtenue en utilisant le discriminant**
   Si on ne reconnaît pas l'identité remarquable, le discriminant de x^2-2x+1 vaut $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 2=0$ donc le polynôme x^2-2x+1 admet une unique racine : $x_0=\dfrac{-(-2)}{2}=1$. On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$		$+$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-2$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

   ($)pour le tableau de signes Donc pour tout $x>0$, $f(x)-2\geq 0$ i.e. $f(x)\geq 2$ donc f est bien minorée par 2 sur $]0;+\infty[$.
5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1\geq 0$ donc si $x\in]-\infty;0[$, $f(x)\leq 0$ et donc f est majorée par 0 sur $]-\infty;0[$. **($$)qui sont aussi donnés si on réutilise le tableau de signes précédent pour dire que f est majorée par 2**

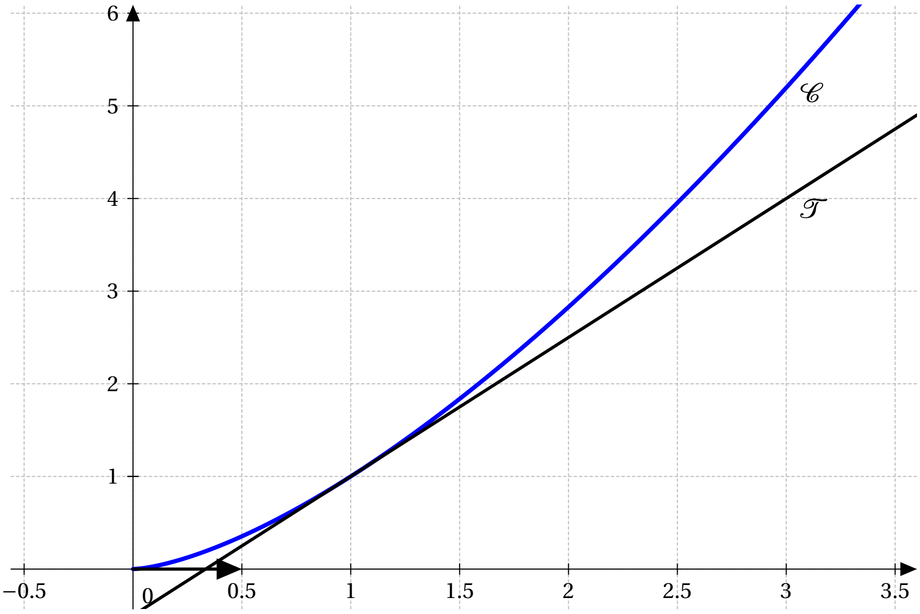
Exercice 3 **(14points)**

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. **($)**
2. Soit $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\sqrt{x}$ **($)** et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{0}=0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.**($)**
3. Soit $x\in[0;+\infty[$. On a $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\geq 0$ pour tout $x\geq 0$.**($)pour obtenir la première forme de f'**
   Donc on obtient le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
f'	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

   ($)pour justifier le signe de f' et **($)pour le tableau de variations de f**
   (0$)si le signe de f' n'est pas justifié
4. Une équation de $\mathscr{T}$ est donnée par $y=f'(1)(x-1)+f(1)$**($)** $=\dfrac{3}{2}(x-1)+1=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.**($)**
5. Pour tout $x>0$, $f''(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}>0$ **($)pour l'expression de f''** donc f est convexe.**($)**
   Par conséquent, $\mathscr{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes, donc en particulier, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{T}$. **($)**

6. On obtient le graphe suivant :



($)pour la tangente horizontale en 0
($)pour le tracé de $\mathscr{T}$
($)pour le tracé de $\mathscr{C}$, notamment tangente en 1

<u>Exercice 4</u> (10points)

i) On cherche $\mathbb{P}(F_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(C_2)$**($)** $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.**($)**

ii) À présent, on cherche $\mathbb{P}\Big((F_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap F_2)\Big)$**($)** $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.**($)**

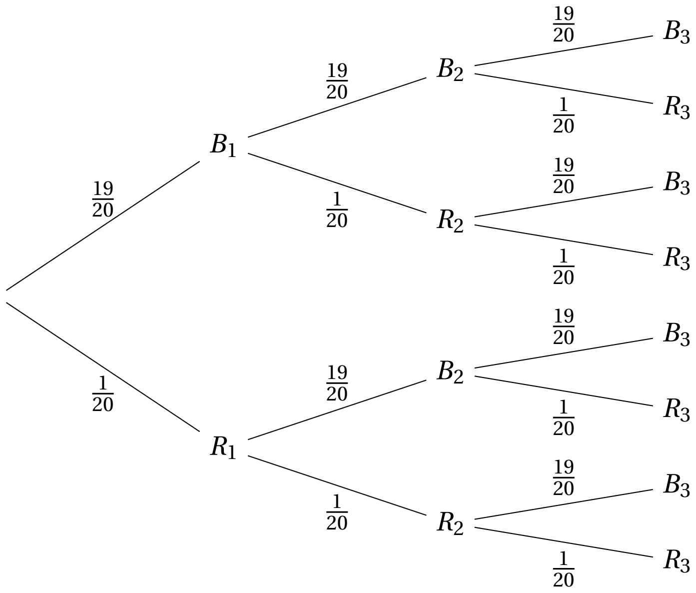
iii) Dans cette question, elle peut obtenir un de ses deux parfums préférés soit au premier soit au deuxième tirage donc elle peut obtenir soit fraise soit chocolat en premier puis vanille ou pistache pour le second ou bien, elle obtient d'abord vanille ou pistache puis en second fraise ou chocolat **($)une explication est attendue** donc la probabilité qu'elle obtienne un seul de ses parfums préférés est $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.**($)**

iv) On cherche $\mathbb{P}\Big((V_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap V_2)\Big)$**($)** $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.**($)**

v) Le contraire d'obtenir au moins un de ses parfums préférés est n'en obtenir aucun **($)pour dire que l'on passe par le contraire et l'expliciter** donc la probabilité qu'elle obtienne au moins un de ses parfums préférés vaut $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.**($)**

Exercice 5 **(8points)**

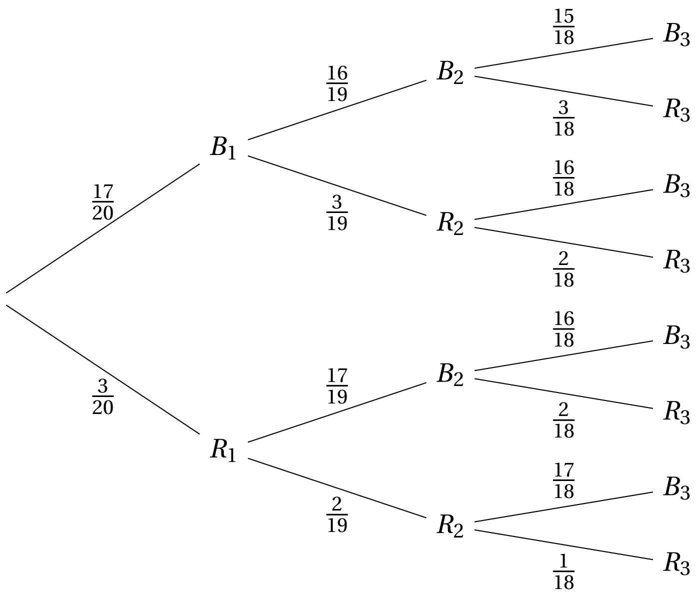
1. On tire trois boules successivement avec remise de l'urne U_1 donc l'arbre correspondant est le suivant :



   a) On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$**($)** $= \dfrac{1}{20} \times \dfrac{1}{20} \times \dfrac{1}{20}$.**($)**

   b) On peut obtenir trois boules blanches ou trois boules rouges **($)une explication doit être donnée (une phrase ou avec les évènements définis)** donc la probabilité d'obtenir un tirage unicolore vaut $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{19}{20} \times \dfrac{19}{20} \times \dfrac{19}{20} + \dfrac{1}{20} \times \dfrac{1}{20} \times \dfrac{1}{20}$.**($)**

2. On peut cette fois traduire la situation par l'arbre suivant :

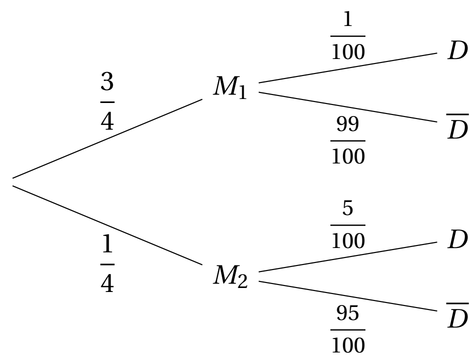


   a) On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$**($)** $= \dfrac{3}{20} \times \dfrac{2}{19} \times \dfrac{1}{18}$.**($)**

   b) Le contraire d'obtenir au moins une boule rouge est d'obtenir trois boules blanches. **($)il est indispensable de dire que l'on passe par le contraire et l'expliciter** Or la probabilité d'obtenir trois boules blanches est $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{17}{20} \times \dfrac{16}{19} \times \dfrac{15}{18}$ donc celle d'obtenir au moins une boule rouge vaut $1 - \dfrac{17}{20} \times \dfrac{16}{19} \times \dfrac{15}{18}$.**($)**

Exercice 6 **(7points)**

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



($)pour l'arbre en entier. **(0$)si un évènement ou une probabilité n'est pas bonne**

2. Les événements M_1 et M_2 forment un système complet d'événements**($)** , donc par la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}_{M_1}(D)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}_{M_2}(D)\mathbb{P}(M_2)$**($)** $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{100} = \frac{1}{50}$.**($)**

3. On cherche $\mathbb{P}_D(M_2)$.**($)** Par la formule de Bayes, $\mathbb{P}_D(M_2) = \frac{\mathbb{P}_{M_2}(D)\mathbb{P}(M_2)}{\mathbb{P}(D)}$**($)** $= \frac{\frac{5}{100} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{50}} = \frac{5}{8}$.**($)**