CHAPITRE III

POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ
COURS

Objectifs du chapitre

Savoir trouver les racines d'un polynôme du second degré.

Savoir factoriser un polynôme du second degré.

Savoir trouver le signe d'un polynôme du second degré.

1 Fonctions polynômes du second degré et signe d'un produit

1.1 Étude d'un exemple

Exercice 1

On se propose d'étudier le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise vendant x milliers d'objets. On sait que le bénéfice est donné par la fonction $f(x) = -2x^2 + 11x - 5$ et que l'entreprise peut produire au maximum 6000 objets.

1. Donner l'ensemble de définition de f qui sera noté $\mathcal{D}$.
2. Tracer la courbe représentative de f.
3. Quelle conjecture peut-on faire sur le signe de la fonction f ?
4. Que cela représente-t-il pour le bénéfice de l'entreprise ?
5. Montrer que $f(x) = (2x-1)(-x+5)$.
6. Tracer sur le même graphique que précédemment les courbes représentatives de $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = -x + 5$.
7. Étudier le signe de g ainsi que celui de h sur $\mathcal{D}$.
8. Faire le tableau de signes de f sur $\mathcal{D}$.
9. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice si elle produit 200 objets ? 2400 objets ? 5600 objets ?

1.2 Fonction polynôme de degré 2

1.2.1 Définition

Définition (Question de cours)

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

1.2.2 Sens de variations

Théorème

Le sens de variation est donné par les tableaux suivant :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Si $a < 0$

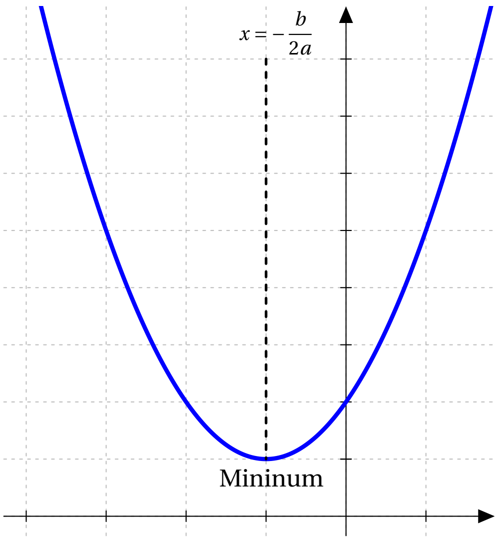
x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$

1.2.3 Courbe représentative

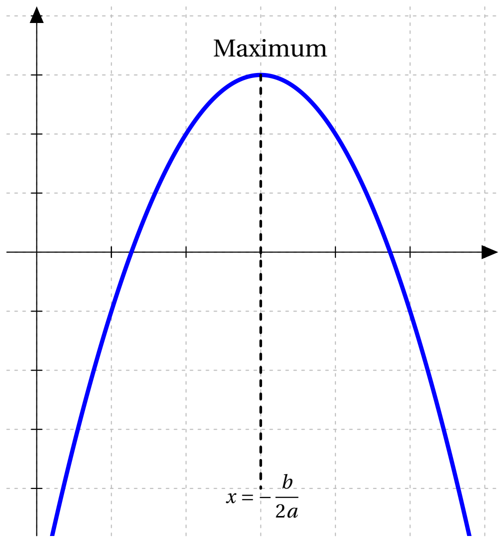
Propriété

La courbe représentative est donc donnée par :

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Remarques importantes !!

- La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**.
- si $a > 0$, on dit que la parabole a "*la tête en bas*".
- si $a < 0$, on dit que la parabole a "*la tête en haut*".
- La droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{x^2}{10} + x$.

1. Calculer $f(0)$ ainsi que $f(10)$. Que remarque-t-on ?
2. En déduire l'abscisse du sommet de la parabole puis son ordonnée.
3. Donner le tableau de variations de f.

1.3 Signe d'un produit

Exercice 3

Étudier le signe des expressions suivantes :

i) $(x+3)(x-6)$,

ii) $(3x-1)(4x-8)$,

iii) $(-5x+10)(2x-6)$.

Exercice 4 (Exercice de khôlle)

Résoudre les inéquations suivantes :

i) $(-3x+9)(x+7) \geq 0$,

ii) $(3x-12)(2x+4) > 0$.

2 Racines d'un polynôme du second degré

2.1 Racines et discriminant

Définition

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels, $a \neq 0$, un polynôme du second degré.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une **racine** de f si $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$.

Définition

On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ la quantité, notée Δ et définie par

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Exercice 5

Calculer les discriminant des polynômes suivants :

i) $2x^2 + 3x - 2$,

ii) $x^2 - 2x + 1$,

iii) $x^2 + x + 1$.

Théorème (Question de cours)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f. Alors

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Exercice 6

Trouver les racines des polynômes de l'exercice précédent.

Les racines éventuelles d'un polynôme permettent de le factoriser :

Théorème (Question de cours)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et Δ son discriminant. Alors

- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines x_1 et x_2 et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, f admet une unique racine x_0 et $f(x) = a(x - x_0)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle et f ne se factorise pas.

Exercice 7

Écrire les formes factorisées des polynômes de l'exercice précédent.

Remarques importantes !!

On évitera d'utiliser le discriminant dans les cas simples :

- Si on cherche à résoudre $x^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$ et l'équation n'a pas de solution si $a < 0$.
- Si on cherche à résoudre $4x^2 - 16 = 0$, on utilisera l'identité remarquable "$a^2 - b^2$" :
  $4x^2 - 16 = (2x - 4)(2x + 4)$ donc $4x^2 - 16 = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -2$.
- Si on cherche à résoudre $2x^2 - x = 0$, on factorise par x : $2x^2 - x = 0$ si et seulement si $x(2x - 1) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

2.2 Signe d'un polynôme du second degré

Théorème (Question de cours)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$). Le signe de f est donné par un des tableaux suivants :

$*$ Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

$*$ Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

$*$ Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

i) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$,

ii) $x^2 + x + 1 < 0$.

3 Polynôme de degré n

Définition

- On appelle **monôme de degré n** tout terme de la forme ax^n, avec $a \in \mathbb{R}$.
- Un **polynôme de degré n** est la somme de monômes de degré inférieur ou égal à n :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \text{ avec } a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$$

- Un nombre α est appelé une **racine** de P si $\boldsymbol{P(\alpha) = 0}$.

Théorème

Soit P un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$.
α est racine de P si et seulement si P se factorise par $(x - \alpha)$ i.e. $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$.

Exercice 9

Factoriser le polynôme $x^3 - 1$.