CHAPITRE IV

PROBABILITÉS
COURS

Objectifs du chapitre

Connaitre et savoir utiliser le vocabulaire des probabilités.

Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité.

Savoir utiliser un système complet d'événements.

Connaitre et exploiter la formule de la probabilité d'une union.

1 Opérations sur les ensembles

1.1 Appartenance et inclusion

Définition

Soit E un ensemble.

- Pour dire que x est un élément de E, on note $x \in E$ et on dit que **x appartient à E**.
- On dit qu'un ensemble A est **inclus dans E** si tout élément de A appartient à E i.e. pour tout $x \in A$, $x \in E$. Dans ce cas, on dit aussi que A est un **sous-ensemble de E** ou une **partie de E**.
- On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1.2 Union, intersection et complémentaire

Définition

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On définit

- l'**union de A et B** :
$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \textbf{ ou } x \in B\},$$
- l'**intersection de A et B** :
$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \textbf{ et } x \in B\},$$
- le **complémentaire de A dans E** :
$$\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}.$$

On dira que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 1

On considère $E = \{0;1;2;3;4;5\}$, $A = \{0;2;4\}$ et $B = \{1;2;3;5\}$. Expliciter $A \cup B$, $A \cap B$ et $\overline{A}$.

Propriété

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Définition (Question de cours)

Soit E un ensemble et E_1, E_2,..., E_n des sous-ensembles de E. On dit que la famille $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une **partition** de E si

i) $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$,

ii) pour tout $i\neq j$, $E_i\cap E_j=\emptyset$.

Exercice 2

On considère toujours $E=\{0;1;2;3;4;5\}$. Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

i) $E_1=\{0;1;5\}$, $E_2=\{3;4\}$, $E_3=\{2\}$.

ii) $E_1=\{0;2;4\}$, $E_2=\{3;5\}$.

iii) $E_1=\{0;1\}$, $E_2=\{3;5\}$, $E_3=\{1;2;4\}$.

1.3 Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles. On définit le **produit cartésien** de E et F comme l'ensemble noté $E\times F$ et formé de l'ensemble des couples (x, y), où $x\in E$ et $y\in F$:

$$E\times F=\{(x,y),\ x\in E,\ y\in F\}.$$

Remarques importantes !!

- Si $F=E$, on note $E\times E=E^2$.
- Plus généralement, si E_1, E_2,...,E_n sont n ensembles, on définit $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ comme étant l'ensemble des n-uplets $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, où $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$,..., $x_n\in E_n$:

$$E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n),\ x_i\in E_i,\ \forall i\leq n\}.$$

Exercice 3

Expliciter le produit cartésien des ensembles suivants :

i) $E=\{a,b\}$ et $F=\{0;1\}$,

ii) $E_1=\{a;b\}$, $E_2=\{0;1\}$ et $E_3=\{\circ,\square\}$.

iii) $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$.

2 Expérience aléatoire, univers et événements

2.1 Univers associé à une expérience aléatoire

Définition

On dit qu'une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et qu'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

Exemple : lancer de dé, tirage de boule dans une urne, lancer de pièce, tirage de carte...

Définition

L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. Il est noté Ω.

Exercice 4

Déterminer l'univers associé aux expériences suivantes :

- On lance un dé cubique et on s'intéresse au numéro de la face supérieure.
- On lance une pièce et on note le résultat sur la face supérieure.

2.2 Événements

2.2.1 Définitions

Définition

Un **événement** A est une partie de Ω.

Exercice 5

On lance un dé cubique équilibré. Expliciter les événements suivants :

i) A_1 : "*obtenir un nombre pair*" ;

ii) A_2 : "*obtenir un nombre supérieur ou égal à 3*",

iii) A_3 : "*obtenir un multiple de 3*",

iv) A_4 : "*obtenir un nombre inférieur à 10*",

v) A_5 : "*obtenir un nombre strictement négatif*".

Remarques importantes !!

On observe deux événements particulier :

- L'**événement impossible** qui ne comporte aucune issue (A_5). C'est l'ensemble vide : $\emptyset$.
- L'**événement certain** qui comporte toutes les issues (A_4). C'est Ω tout entier.

Définition

Une issue est également appelée un **événement élémentaire**.

On dit que chaque issue qui est dans A **réalise** l'événement A.

Exemples : 4 réalise A_1 et A_2 mais 2 ne réalise pas A_3.

2.2.2 Opérations sur les événements

Les événements sont par définition des ensembles, on peut utiliser les opérations définies dans le paragraphe précédent :

Définition

Soit A et B deux événements d'un même univers Ω. On définit

- l'événement $A \cup B$: c'est l'événement dont les issues sont dans A ou dans B ; c'est donc l'événement "A **ou** B".
- l'événement $A \cap B$: c'est l'événement dont les issues sont à la fois dans A et dans B ; c'est donc l'événement "A **et** B".
- l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$: c'est la partie de Ω constituée de toutes les issues qui ne sont pas dans A.

Exercice 6

En reprenant les événements précédents, expliciter les événements suivants :
$A_1 \cap A_2$; $A_1 \cup A_3$; $A_2 \cap A_4$; $A_3 \cap A_5$; $A_1 \cap A_1$; $A_1 \cup A_4$.

Définition

Lorsque A et B n'ont pas d'issue en commun, on dit que A et B sont **incompatibles**. (Donc A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$)

Définition (Question de cours)

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille d'événements d'un univers Ω. On dit que la famille $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ est un **système complet d'événements** si elle forme une partition de Ω.

3 Probabilité

3.1 Définitions

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

Définition (Question de cours)

Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathbb{P}$ de l'ensemble des parties de Ω, $\mathscr{P}(\Omega)$ à valeurs dans $[0;1]$ et vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

ii) pour tout $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarques importantes !!

- Une probabilité est donc une application qui associe à chaque événement de Ω, un **nombre compris entre 0 et 1**.
- On convient que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Exemple : lancer de dé cubique équilibré.

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Théorème

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

1) Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, alors $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_i) = 1$.

2) Soit $p_1, \ldots, p_n$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

3.2 Loi équirépartie

Définition

Parfois, les n issues de Ω ont toutes la même probabilité. On dit qu'elles sont **équiprobables**. La probabilité est alors dite **équirépartie**.

Remarques importantes !!

La probabilité d'une issue est alors de $\frac{1}{n}$.

Exemples :

- Pour un dé équilibré, cette probabilité vaut $\frac{1}{6}$.
- Pour une pièce équilibrée, elle vaut $\frac{1}{2}$.
- Si on tire une carte dans un jeu de 32, elle vaut $\frac{1}{32}$.

3.3 Probabilité d'un événement

Propriété

La probabilité d'un événement A, notée $\mathbb{P}(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires appartenant à A.

Exercice 7

Déterminer la probabilité des événements définis dans l'exercice 5 dans le cas d'un dé truqué ayant pour loi de probabilité le tableau suivant :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$0,1$	$0,2$	$0,5$	$0,05$	$0,1$	$0,05$

Propriété

Dans le cas où les événements élémentaires sont équiprobables, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Exercice 8

Déterminer la probabilité des événements définis dans l'exercice 5 dans le cas d'un dé équilibré.

Propriété

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

La définition d'une probabilité donne la probabilité de $A \cup B$ si A et B sont incompatibles. S'ils ne le sont pas, on a la formule suivante :

Théorème (Question de cours)

Soit A et B deux événements. Alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Propriété (Conséquence)

On a $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

On a, par définition, $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc d'après la formule précédente, on obtient

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}\left(A \cap \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$

D'où $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$. $\square$