

ECT1 - CONCOURS BLANC N°2

Durée : 4 heures.

Documents et calculatrices interdits.

Les résultats doivent obligatoirement être encadrés (ou surlignés).

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- 6 a pour image 3 par f
- 0 a trois antécédents par f : -3 , 2 et 4.
- Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	-1	3	5	$+\infty$
f	$+\infty$		$+\infty$	4	
		-3		$-\infty$	1

Tracer ce qui peut être la courbe représentative de f .

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 8n - 14$.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2n - 3$.
 - (a) Calculer v_0 .
 - (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
 - (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

Exercice 3

1. Justifier que pour tout réel x on a : $x^2 + x + 1 > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

2. Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.
4. (a) Justifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.
(b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.
5. (a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions qui sont : -1 et 0 .
(b) Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 .
6. (a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x on a : $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
(b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.
7. À l'aide du tableau de variations, dites combien de solution l'équation $f(x) = 1$ possède-t-elle dans $[0, +\infty[$.
8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \simeq 0,9$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -0,3$, $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \simeq 0,4$ et $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \simeq -1,4$.
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en 5b.

Exercice 4

Partie A

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}u_n$ et la condition initiale $u_1 = \frac{1}{6}$.

1. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.
Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Partie B

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de colle. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement « le professeur oublie ses clés le jour n » et $p_n = P(E_n)$.

On suppose qu'il oublie ses clés le premier jour avec probabilité $\frac{1}{6}$. On suppose en outre que :

- s'il oublie ses clés le jour n , alors il les oublie le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{12}$,
 - s'il n'oublie pas ses clés le jour n , alors il les oublie le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{4}$.
1. Donner les valeurs des probabilités $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.
 2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}p_n.$$

3. À l'aide des résultats de la Partie A, donner l'expression de p_n en fonction de n .

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (2x - 4)e^{-x}$.

1. Expliquer pourquoi $D_f = \mathbb{R}$.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ et donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f et en déduire le maximum de f .
5. Calculer la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 1.

Exercice 6

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts : un défaut de clavier, un défaut d'écran.

- 2% présentent un défaut d'écran;
 - 3% présentent un défaut de clavier ;
 - 1% présentent les deux défauts.
1. On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.
 - E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran »;
 - C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ».

Déterminer $P(E)$, $P(C)$ et $P(E \cap C)$.

2. On considère les événements suivants.
 - A : « L'ordinateur présente au moins un défaut »;
 - B : « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran »;
 - D : « L'ordinateur ne présente aucun des deux défauts ».
 - (a) Traduire ces 3 événements à l'aide de E et C .
 - (b) Calculer leurs probabilités.