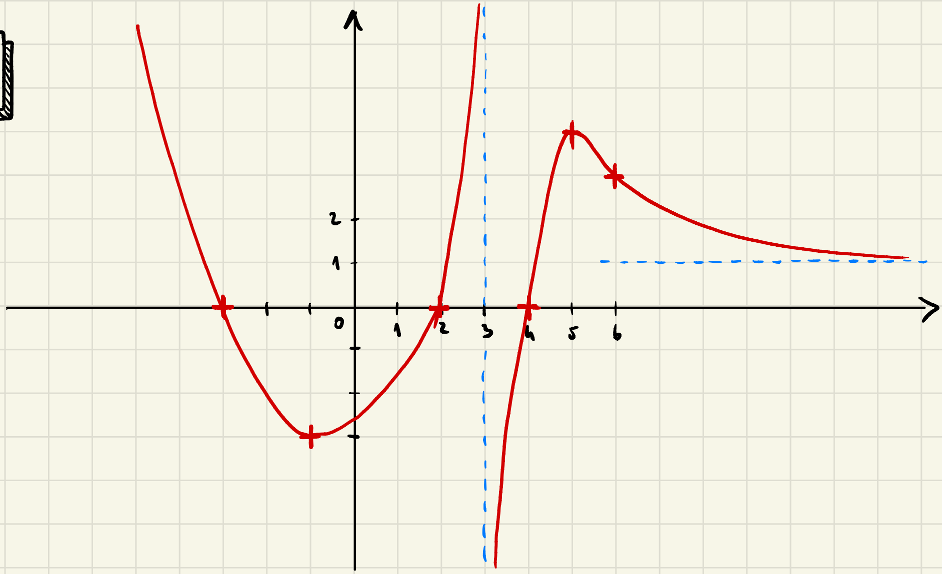
Concours Blanc N°2

Exo n°1



Exo n°2

① $U_1 = 5U_0 + 8\times 0 - 14 = 5\times 4 - 14 = 6$ Donc $\boxed{U_1 = 6}$

② On pose $P_n : U_n \geqslant 3$

• Init : $U_0 = 4$ et $4 \geqslant 3$ Donc $P_0 : U_0 \geqslant 3$ est vraie

• Hérédité : Soit $k \geqslant 1$. On suppose P_k vraie. Montrons que P_{k+1} est vraie.

HR : $U_k \geqslant 3$

$\Leftrightarrow 5U_k \geqslant 15$ $\quad \times 5 > 0$

$\Leftrightarrow 5U_k + 8k - 14 \geqslant 15 + 8k - 14$ $\quad + 8k - 14$

$\Leftrightarrow U_{k+1} \geqslant 8k + 1 \geqslant 8\times 1 + 1$ car $k \geqslant 1$

Donc $U_{k+1} \geqslant 9 \geqslant 3$ Donc P_{k+1} est vraie.

• Conclusion : Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad U_n \geqslant 3}$

3 a] $V_0 = U_0 + 2\times 0 - 3 = 4 - 3 = \boxed{1}$

b] $V_{n+1} = U_{n+1} + 2(n+1) - 3$

$= 5U_n + 8n - 14 + 2n + 2 - 3$

$= 5U_n + 10n - 15$

$= 5(U_n + 2n - 3) = 5V_n$ Donc $\boxed{V_{n+1} = 5V_n}$ $\forall n \geq 0$

Ainsi (V_n) est bien géométrique de raison $q=5$ et de 1^er^ terme $V_0 = 1$

c] $V_n = V_0 \times q^n$

$= 1 \times 5^n = 5^n$ Donc $U_n = V_n - 2n + 3$

$\forall n \geq 0$ $\boxed{U_n = 5^n - 2n + 3}$

$\boxed{\text{Exo n}^\circ 3}$

1 On veut résoudre $x^2 + x + 1 > 0$

$a=1$ $b=1$ $c=1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$

Donc

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+1	$+$

(du signe de $a=1$)

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+x+1 > 0}$

2 On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $x \to +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

Par composée de limites

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+x+1) = +\infty}$

• $x \to -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right]$$ Par composée : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+x+1) = +\infty}$

③ $$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln(2^2) = \ln(3) - 2\ln(2)$$

④ a] Ici $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2+x+1$ et $u'(x) = 2x+1$

donc $f' = \frac{u'}{u}$ ainsi $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}}$

b]

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\longrightarrow$ $2x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\longrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2+x+1 > 0$ (question 1.)

⑤ a] $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2+x+1)} = e^0$

$\Leftrightarrow x^2+x+1 = 1 \Leftrightarrow x^2+x = 0$

$a=1$ $b=1$ $c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\times1\times0$

$\Delta = 1 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$\boxed{\text{Donc } f(x)=0 \text{ possède 2 solutions } x=0 \text{ et } x=-1.}$

b] Tangente en 0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Or $f'(0) = \dfrac{2\times 0+1}{0^2+0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $f(0) = \ln(0^2+0+1) = \ln(1) = 0$

Ainsi $T_0 : y = 1(x)+0$ donc $\boxed{T_0 : y = x}$

6 a] Ici $f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = x^2+x+1 \quad v'(x) = 2x+1$

Ainsi $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+1-[4x^2+4x+1]}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} = \boxed{\dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}}$

b]

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2-2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Convexité de f		f est concave		f est convexe		f est concave	

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times(-2)\times 1$

$= 4+8 = 12 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{12}}{2\times(-2)} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

La dérivée seconde s'annule exactement 2 fois en changeant de signe.

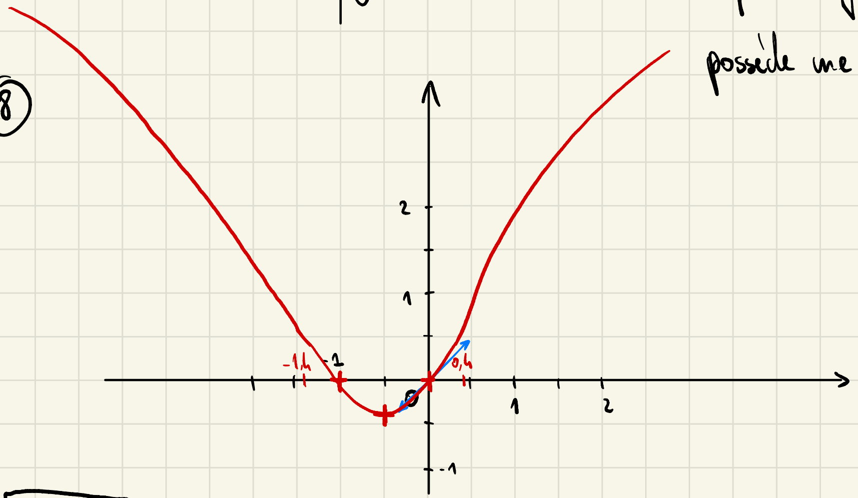
Ainsi $\mathcal{C}$ admet exactement 2 points d'inflexion aux points d'abscisses $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

⑦ Sur $[0,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1	$+\infty$

Sur $[0,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ possède une unique solution.

⑧



Exo 4 — PARTIE A

① $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{4}\left(V_n + \frac{1}{3}\right) + \frac{1^{\times 3}}{4_{\times 3}} - \frac{1^{\times 4}}{3_{\times 4}}$

$= \frac{1}{4}V_n + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{4}V_n}$

De plus :

$V_1 = U_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1^{\times 2}}{3_{\times 2}}$

$= \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$

Ainsi (V_n) est bien géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de 1er terme $V_1 = -\frac{1}{6}$

② Alors $\forall n \geq 1 \quad V_n = V_0 \times q^{n-1} = \boxed{-\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

③ $\forall n \geq 1 \quad U_n = \frac{1}{3} + V_n$

$\boxed{U_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

PARTIE B ① $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{1}{4}$

② $\{E_n, \overline{E_n}\}$ forment un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$= p_n \times \frac{1}{2} + (1-p_n) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} p_n$

Donc $\forall n \geq 1$ $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4}}$

③ Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\boxed{p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$ car les suites (p_n) et (v_n) sont identiques.

Exo 5 ① f est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle donc $D_f = \mathbb{R}$.

② • $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x-4 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-4)e^{-x} = -\infty}$

• $f(x) = (2x-4)e^{-x} = x\left(2 - \frac{4}{x}\right)e^{-x} = xe^{-x}\left(2 - \frac{4}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ (Croissances comparées)

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{4}{x} = 2$

Par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

③ Ici $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x-4$ $u'(x) = 2$

$v(x) = e^{-x}$ $v'(x) = (-1) \times e^{-x}$

Alors $f' = u'v + uv'$

Donc $f'(x) = 2 \times e^{-x} + (2x-4) \times (-1) \times e^{-x}$

$$= e^{-x}\left[2 + (2x-4)\times(-1)\right] = e^{-x}\left[2 - 2x + 4\right]$$

Ainsi $\boxed{f'(x) = (-2x+6)e^{-x}}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-3}$	$\searrow$	0

(4)

$-2x+6 = 0$
$\Leftrightarrow -2x = -6$
$\Leftrightarrow x = \frac{-6}{-2} = 3$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 0$

$f(3) = (2\times 3 - 4)e^{-3}$
$= 2e^{-3}$

(5) $T_1 : \quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 4e^{-1}(x-1) - 2e^{-1}$

$y = 4e^{-1}x - 4e^{-1} - 2e^{-1}$

Ainsi : $\boxed{T_1 : \quad y = 4e^{-1}x - 6e^{-1}}$

$f'(1) = (-2\times 1 + 6)e^{-1} = 4e^{-1}$

$f(1) = (2\times 1 - 4)e^{-1} = -2e^{-1}$

Ex n°6

(1) $p(E) = 0{,}02 \qquad p(C) = 0{,}03 \qquad p(E\cap C) = 0{,}01$

(2) a] $A = E \cup C \qquad B = E \cap \overline{C} \qquad D = \overline{E} \cap \overline{C}$

b] $p(A) = p(E \cup C) = p(E) + p(C) - p(E \cap C)$

$$= 0{,}02 + 0{,}03 - 0{,}01 = \boxed{0{,}04}$$

$$p(B) = p(E \cap \overline{C}) = p(E) - p(E \cap C) = 0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}01$$

$$p(D) = p(\overline{E} \cap \overline{C}) = 1 - p(\overline{\overline{E} \cap \overline{C}})$$

$$= 1 - p(E \cup C)$$

$$= 1 - 0{,}04 = \boxed{0{,}96}$$