CORRECTION DU CB N°03

EXERCICE 1. d'après ECRICOME 2024

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4}{1+e^x}$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^x) = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=4}$

La droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}$, en $-\infty$
L'étude de la position relative sera faite à la question 2c

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^x) = +\infty \end{cases}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0}$

La droite D d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x)-y_D$

$$\boldsymbol{f(x)-y_D=f(x)-0=f(x)=\frac{4}{1+e^x}}$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $4>0$ et $1+e^x>0$ donc $f(x)-y_D>0$ et par suite $\mathscr{C}$ est au-dessus de D

2- a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe f'

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $-4e^x < 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$ par suite $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}}$ **et $f'(x)<0$**

b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4	2 ↘	0

$f(0) = \dfrac{4}{1+e^0} = \dfrac{4}{2} = 2$

c) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?

Méthode 1: classique

Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$ revient à étudier le signe de $f(x)-4$

$f(x)-4 = \dfrac{4}{1+e^x} - 4 = \dfrac{4-4-4e^x}{1+e^x} = \dfrac{-4e^x}{1+e^x}$

$\forall\ x\in\mathbb{R},\ -4e^x < 0$ et $1+e^x > 0$ d'où $f(x)-4 < 0$ et par suite la courbe représentative de f sera en dessous de la droite d'équation $y = 4$

Conclusion : la courbe représentative de f sera en dessous de la droite d'équation $y=4$

Méthode 2: en utilisant le tableau de variations

D'après le tableau de variations $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < 4$ donc la courbe représentative de f sera en dessous de la droite d'équation $y = 4$

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ est donnée par

$T:\ \ y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = -\dfrac{4}{2^2} = -1$ et $f(0) = 2$

donc $T:\ \ y = -1(x-0)+2$ i. e $y = -x+2$

Conclusion : l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=0$ est $y=-x+2$

3- a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

$\forall\ x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{-4e^x(1+e^x)^2-(-4e^x)2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{4e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Conclusion : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}, 4e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $e^x - 1$

Pour étudier le signe de e^x-1, je vais résoudre une inéquation , par exemple $e^x-1 \geq 0$

$e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$x \geq 0$ car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où le signe de $e^x - 1$: $\quad - \quad 0 \quad +$

Conclusion :

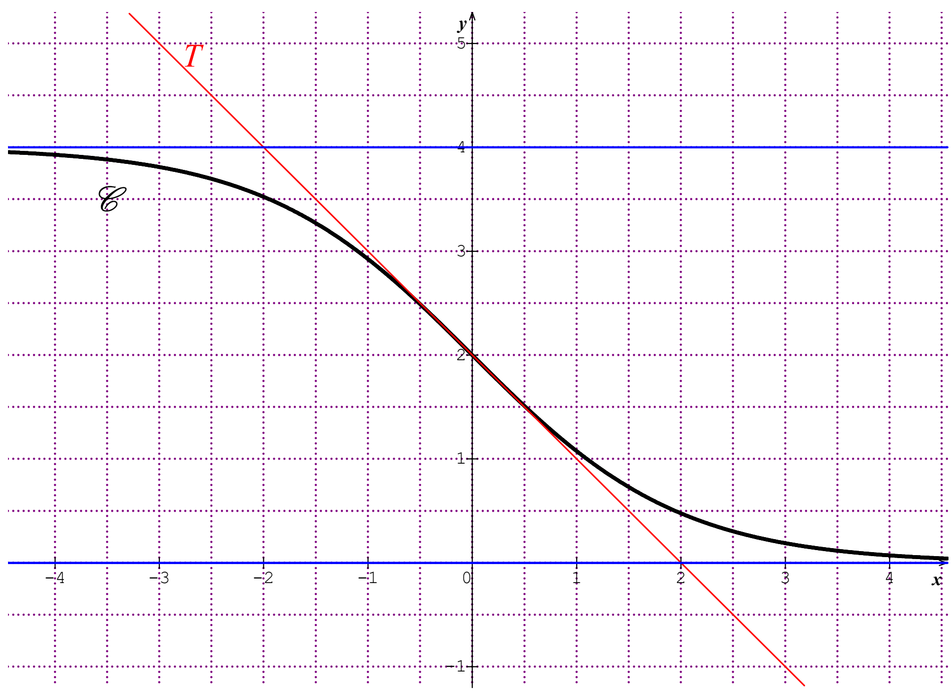
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	**0**	$+$
convexité	f **est concave**	**point d'inflexion $(0, f(0))$**	f **est convexe**

$f''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe donc $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion de coordonnées (0, 2) car $f(0)=2$

c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

si $x < 0$, f est concave donc $\mathscr{C}$ est en dessous de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
si $x > 0$, f est convexe donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

4- Tracer l'allure de la courbe représentative de f, les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.



5- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 4\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 4\frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 4\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{4}{1+e^x} = f(x)$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable donc admet des primitives

On note F la primitive cherchée

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -4\dfrac{-1e^{-x}}{1+e^{-x}}$ On reconnaît $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+e^{-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = -4\ln|1+e^{-x}|+k = -4\ln(1+e^{-x})+k$ car $\forall\ x \in \mathbb{R},\ 1+e^{-x} > 0$

Déterminons k pour que $F(0) = 0$

$-4\ln(1+e^0)+k = 0 \Leftrightarrow -4\ln(2)+k = 0 \Leftrightarrow k = 4\ln(2)$

Conclusion : la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est $F(x) = -4\ln(1+e^{-x})+4\ln(2)$

6- Soit g la fonction définie sur $]0, 4[$ par $g(y) = \ln\left(\dfrac{4}{y}-1\right)$ pour tout réel y de $]0, 4[$.

a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 4[$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'après le tableau de variation

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Conclusion : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=]0, 4[$.

b) i. Pour tout $y \in]0, 4[$, calculer $f(g(y))$

$\forall y \in]0, 4[,\ f(g(y)) = \dfrac{4}{1+e^{g(y)}} = \dfrac{4}{1+e^{\ln\left(\frac{4}{y}-1\right)}} = \dfrac{4}{1+\dfrac{4}{y}-1} = \dfrac{4}{\dfrac{4}{y}} = 4\dfrac{y}{4} = y$

Conclusion : $\forall y \in]0, 4[,\ f(g(y))=y$

ii. Que représente la fonction g pour la fonction f ?

On a vu que f est bijective donc g est la fonction réciproque de f et de plus $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(f(x)) = x$

c) Déterminer les réels x tels que $0{,}05 \le f(x) \le 2$.

$0{,}05 \le f(x) \le 2$.

$g(0{,}05) \ge g(f(x)) \ge g(2)$ car comme f est strictement décroissante, g l'est aussi

Or $g(0{,}05) = g\left(\dfrac{5}{100}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{\frac{5}{100}}-1\right) = \ln\left(\dfrac{400}{5}-1\right) = \ln(80-1) = \ln(79)$

$g(2) = \ln\left(\dfrac{4}{2}-1\right) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$

et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(f(x)) = x$ comme vu précédemment

donc $0 \le x \le \ln(79)$

Conclusion : les réels x tels que $0{,}05 \le f(x) \le 2$ sont $0 \le x \le \ln(79)$

EXERCICE 2. d'après ECRICOME

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2+1-\ln(x)$

1- Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de g

g existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $Dg = \mathbb{R}_+^*$

$1 \in Dg$ mais $-1 \notin Dg$ donc Dg n'est pas centrée en 0 et par suite g est ni paire, ni impaire.

<u>Conclusion</u> : $Dg=\mathbb{R}_+^*$ et g est ni paire, ni impaire

2- <u>Calculer les limites aux bornes de Dg. On n'étudiera pas les branches infinies .</u>

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \end{cases}$

En remplaçant x par $+\infty$ on trouve une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$" aussi il faut factoriser $g(x)$ par le terme prépondérant ici x^2

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x)=x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0 \text{ croissances comparées} \end{cases}$

3- <u>Dresser le tableau de variations de g. Vous donnerez une valeur exacte et approchée du minimum.</u>

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

$\forall\, x\in Dg,\ g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$

$\forall\, x\in Dg,\ x>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2x^2-1$

$2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\in Dg$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\notin Dg$

d'où le tableau de variation de g

x	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2+1-\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(2)$ ($\approx$1,5+0,35=1,85.)

car $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)=\ln\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln(2)$

4- <u>En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à Dg</u>

d'après le tableau de variation on a : $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)\geq g\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)>0$

<u>Conclusion</u> : $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$

et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+\end{cases}\end{cases}$$

Conclusion : la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \text{ croissances comparées}\end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faites à la question 4.

2- a) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f\,'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ où $f\,'$est la fonction dérivée de f.

f est dérivable sur $Df=\ ]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall\, x\in Df,\ f\,'(x)=1+\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\, x\in Df,\ f\,'(x)=\frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}}$

b) En déduire le signe de $f\,'(x)$ puis le tableau de variations de f.

$\forall\ x\in Df$, $x^2>0$ et $g(x)>0$ d'après la question **A4** donc $f\,'(x)>0$ et par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

3- a) Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution x_0

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le tableau de variations

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$

de plus $3 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

<u>Conclusion</u> : L'équation $f(x)=3$ admet une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

b) <u>Montrer que x_0 appartient à l'intervalle</u> [2 ; 3].

de plus $f(2) = 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(2)}{2} = \dfrac{5+\ln(2)}{2} \approx 2{,}85 < 3$ car $\ln(2) \approx 0{,}7$

et $f(3) = 3 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(3)}{3} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{\ln(3)}{3} > 3{,}5 > 3$ car $\ln(3) \approx 1{,}1$

<u>Conclusion</u> : x_0 appartient à l'intervalle [2 ; 3].

c) <u>Écrire un script `Python` permettant d'encadrer x_0 dans un intervalle d'amplitude 10^{-3}</u>

```
import numpy as np

def f(x):
    return x+1/2+np.log(x)/x

a=2
b=3
while np.abs(b-a)>=10**(-3):
    m=(a+b)/2
    if (f(a)-3)*(f(m)-3) <0 :
        b=m
    else :
        a=m
print(a)
```

On note D la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$

4- a) <u>Calculer la limite de $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ croissances comparées}$$

<u>Conclusion</u> : La droite D d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

b) <u>Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et D. On appellera A le point intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D</u> .

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier $f(x) - y_D = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\forall x \in Df, x > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_D$	‖	$-$	0	$+$	
position	‖	$\mathscr{C}$ est en dessous de D	$\mathscr{C}$ coupe D en $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\mathscr{C}$ est au-dessus de D	

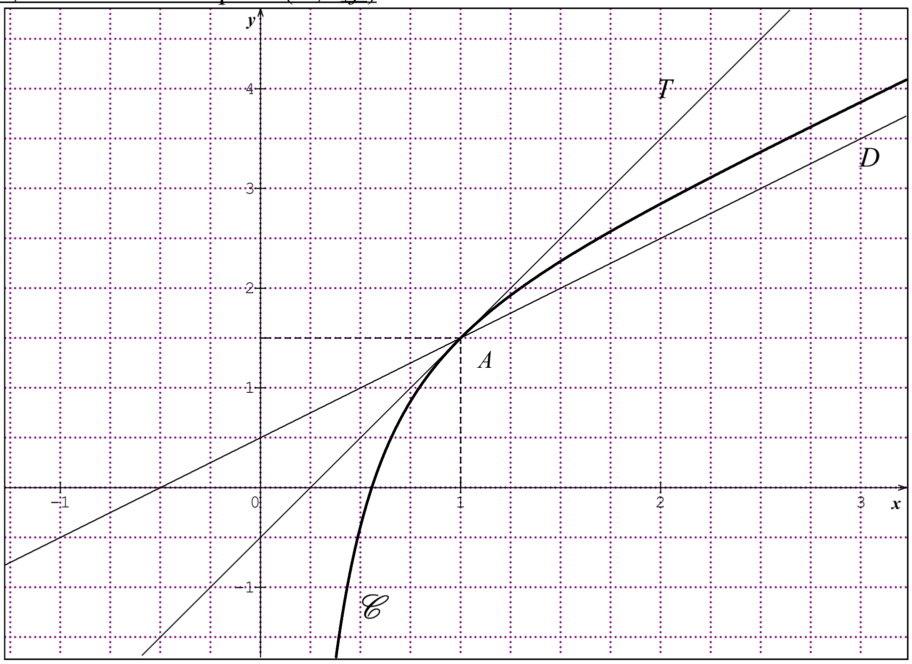
c) <u>Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.</u>

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 est donnée par
$T: \; y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$

avec $f'(1)=\dfrac{1^2+1-\ln(1)}{1^2}=2$ et $f(1)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(1)}{1}=\dfrac{3}{2}$ car $\ln(1)=0$

Conclusion : T: $y=2(x-1)+\dfrac{3}{2}=2x-\dfrac{1}{2}$

5- Tracer $\mathscr{C}$, D et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$



EXERCICE 3. d'après concours

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées »
et G l'évènement « le joueur gagne ».

1- a) Montrer la probabilité de l'évènement N est $\dfrac{2}{5}$

$\Omega=\{\ \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4\}\ \forall\ i\in[\![1,4]\!]\ ,\ b_i\in\{10 \text{ boules}\}\ \}$

$$|\Omega|=\binom{10}{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=10\times3\times7=210$$

Il y a équiprobabilité car les boules sont indiscernables au toucher

L'évènement N signifie que l'on a tiré 1 boule noire parmi 1 et 3 boules blanches parmi 9 sans ordre ni remise d'où

$$P(N)=\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}}=\frac{1\times3\times4\times7}{10\times3\times7}=\frac{2}{5}$$

Conclusion : la probabilité de l'événement N est $\dfrac{2}{5}$

b) Déterminer $P_N(G)$ et $P_{\bar{N}}(G)$

Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Or dans un dé à 6 faces il y a 3 faces paires : 2, 4 et 6

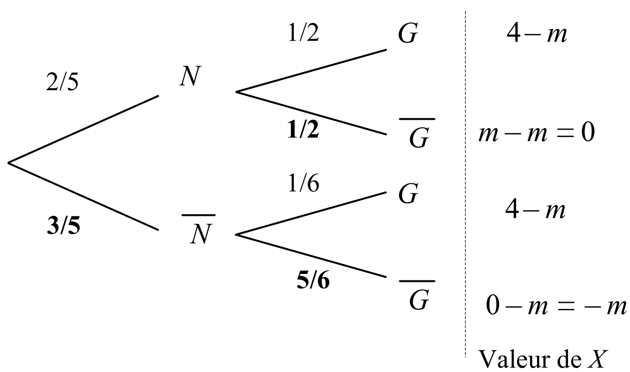
donc $P_N(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner donc $P_{\bar{N}}(G) = \frac{1}{6}$

<u>Conclusion</u> : $P_N(G)=\frac{1}{2}$ et $P_{\bar{N}}(G)=\frac{1}{6}$.

c) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$.

Établissons un arbre pondéré de la situation



N et $\overline{N}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$
\begin{aligned}
P(G) &= P(G\cap N) + P(G\cap \overline{N}) \\
&= P(N)P_N(G) + P(\overline{N})P_{\bar{N}}(G) \\
&= \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

<u>Conclusion :</u> La probabilité de l'événement *G* est $\frac{3}{10}$

d) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

$P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \neq 0$

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(\overline{G}\cap N)}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{10}} = \frac{2}{7}$$

<u>Conclusion</u> : La probabilité que la boule soit noire sachant que le joueur n'a pas gagné est $\frac{2}{7}$

2- Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{4-m, 0, -m\}$

$P(X=4-m) = P(G) = \dfrac{3}{10}$

$P(X=0) = P(\overline{G} \cap N) = P(N)P_N(\overline{G}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{10}$

$P(X=-m) = P(\overline{G} \cap \overline{N}) = P(\overline{N})P_{\overline{N}}(\overline{G}) = \dfrac{3}{5}\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$

D'où la loi de X :

x_i	$4-m$	0	$-m$	totale
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$	$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$	1
x_ip_i	$\frac{12-3m}{10}$	0	$\frac{-5m}{10}$	$\frac{12-8m}{10}$

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

$E(X) = \dfrac{12-8m}{10}$

c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si l'espérance est nulle (car le gain tiens compte de la mise)

$E(X) = 0 \Leftrightarrow 12-8m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

Conclusion : Le jeu sera équitable si la mise est de 1,5 €.

EXERCICE 4. d'après concours

Une usine a fabriqué 25 pièces indiscernables, dont 3 présentent un défaut.

1- On choisit au hasard une pièce parmi les 25 pièces fabriquées.

a) Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse. Vous donnerez le résultat sous forme décimale

$\Omega = \{25 \text{ pièces}\}$

$|\Omega| = 25$

Il y a équiprobabilité car les pièces sont indiscernables

On note D l'événement :" la pièce est défectueuse"

$P(\overline{D}) = \dfrac{25-3}{25} = \dfrac{22}{25} = \dfrac{88}{100}$

Conclusion : la probabilité de choisir une pièce non défectueuse est 0,88

b) Une personne a besoin de 7 pièces non défectueuses. Combien doit-elle acheter de pièces au minimum pour être certaine de les avoir ?

Cette personne a besoin de 7 pièces non défectueuses. Or trois pièces produites par l'usine présentent un défaut.

Conclusion : Il faut donc prendre 7+3=10 pièces au minimum pour être certaine d'avoir 7 pièces non défectueuses.

2- On choisit simultanément 2 pièces au hasard parmi les 25 pièces fabriquées

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 pièces sans défaut ?

Le tirage consiste à choisir 2 pièces sans ordre ni remise parmi 25 donc on fait des combinaisons

$\Omega = \{\{p_1 , p_2\} \ \forall\, i \in \{1,2\}, p_i \in \{25 \text{ pièces}\}\}$

$|\Omega| = \binom{25}{2} = \dfrac{25\times24}{2\times1} = 25\times12$

Il y a équiprobabilité car les pièces sont choisies au hasard
de plus sur les 25 pièces fabriquées on a :

- 3 pièces avec défaut
- 22 pièces sans défaut

On obtient 2 pièces sans défaut donc on tire 2 pièces parmi les 22 sans ordre ni remise

soit $\binom{22}{2} = \dfrac{22\times21}{2\times1} = 11\times21$ possibilités donc $p = \dfrac{11\times21}{25\times12} = \dfrac{11\times3\times7}{25\times3\times4} = \dfrac{77}{100}$

Conclusion : la probabilité d'obtenir 2 pièces sans défaut est $\dfrac{77}{100}$

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut.

b) Donner la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$P(X=0) = \dfrac{77}{100}$ fait à la question précédente

On obtient 1 pièces avec défaut donc on tire 1 pièces parmi les 3 avec défaut sans ordre ni remise et 1 pièce parmi les 22 sans défaut sans ordre ni remise soit $\binom{3}{1}\binom{22}{1} = 3\times22$ possibilités

donc $P(X=1) = \dfrac{3\times22}{25\times3\times4} = \dfrac{22}{100}$

On obtient 2 pièces avec défaut donc on tire 2 pièces parmi les 3 avec défaut sans ordre ni remise soit $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ possibilités

donc $P(X=2) = \dfrac{3}{25\times3\times4} = \dfrac{1}{100}$

d'où la loi de X

x_i	0	1	2	totale
p_i	$\frac{77}{100}$	$\frac{22}{100}$	$\frac{1}{100}$	1
x_ip_i	0	$\frac{22}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

$$E(X)=\sum x_i p_i=\frac{6}{25}=0{,}24$$

d) Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.

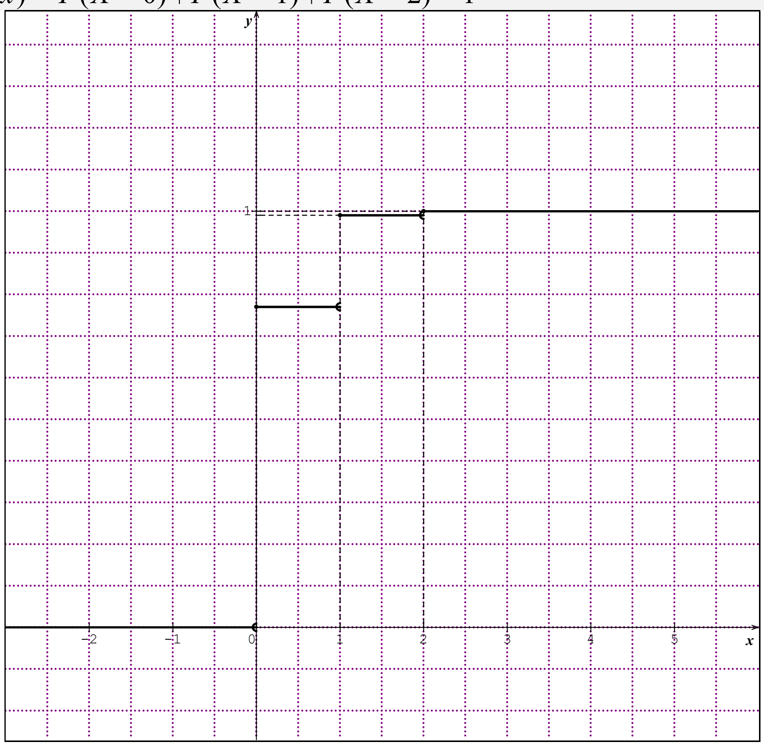
$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=P(X\le x)$

si $x<0$, $\quad F(x)=0$

si $0\le x<1$, $\quad F(x)=P(X=0)=\dfrac{77}{100}$

si $1\le x<2$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{99}{100}$

si $2\le x$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$



3- On suppose que l'usine fabrique un grand nombre de pièces. On suppose maintenant que 10% des pièces produites présente un défaut. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n pièces au hasard à la sortie de l'usine. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses prélevées.

a) Déterminer la loi de Y. On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y=k)$ pour tout k de $Y(\Omega)$.

L'épreuve consiste à prélever une pièce. Elle a deux issues :
le succès :"La pièce présente un défaut " de probabilité 0,1
l'échec : l'événement contraire de probabilité $1-0{,}1=0{,}9$
L'expérience se répète n fois de **manière identique et indépendante.**
On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n expériences.
Conclusion :

Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ 0{,}1)$

$Y(\Omega)=[\![0;\ n]\!]$

$\forall\ k\in[\![0;\ n]\!]\ ,\ P(Y=k)=\dbinom{n}{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{n-k}$

b) Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$

$\boldsymbol{E(Y)=np=0{,}1n}$

$\boldsymbol{V(Y)=npq=0{,}1n\times 0{,}9=0{,}09n}$

EXERCICE 5. d'après ECRICOME 2024

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geq 1}$,$(b_n)_{n\geq 1}$, et $(c_n)_{n\geq 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1=\dfrac{3}{8}$, $b_1=0$ et $c_1=\dfrac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes:

pour tout entier naturel n non nul , $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{2}{11}a_n+\dfrac{3}{11}b_n+\dfrac{3}{11}c_n \\ b_{n+1}=\dfrac{4}{11}a_n+\dfrac{3}{11}b_n+\dfrac{4}{11}c_n \\ c_{n+1}=\dfrac{5}{11}a_n+\dfrac{5}{11}b_n+\dfrac{4}{11}c_n \end{cases}$

1- Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n+b_n+c_n=1$.

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$, « $a_n+b_n+c_n=1$» pour tout entier naturel n non nul

♦ *Initialisation*

pour $n=1$

$a_1+b_1+c_1=\dfrac{3}{8}+0+\dfrac{5}{8}=\dfrac{8}{8}=1$

Donc la propriété est vérifiée au premier rang.

♦ *Hérédité*

On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est à dire $a_n+b_n+c_n=1$

Montrons la propriété au rang n +1

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} &= \frac{2}{11}a_n+\frac{3}{11}b_n+\frac{3}{11}c_n+\frac{4}{11}a_n+\frac{3}{11}b_n+\frac{4}{11}c_n+\frac{5}{11}a_n+\frac{5}{11}b_n+\frac{4}{11}c_n \\ &= a_n+b_n+c_n=1 \end{aligned}$$

Donc la propriété est démontrer au rang $n+1$

Donc d'après le principe de récurrence , $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n non nul : $a_n+b_n+c_n=1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geq 1}$,$(y_n)_{n\geq 1}$, et $(z_n)_{n\geq 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul, $x_n=a_n+b_n+c_n$,$y_n=-a_n+2b_n-c_n$ et $z_n=-5a_n-5b_n+7c_n$

2- Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est constante.

Conclusion : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=a_n+b_n+c_n=1$ d'après la question précédente donc $(x_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à 1.

3- a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{11}$

$$\begin{aligned} \forall\ n\in\mathbb{N}^*, y_{n+1} &= -a_{n+1}+2b_{n+1}-c_{n+1} \\ &= -\frac{2}{11}a_n-\frac{3}{11}b_n-\frac{3}{11}c_n+\frac{8}{11}a_n+\frac{6}{11}b_n+\frac{8}{11}c_n-\frac{5}{11}a_n-\frac{5}{11}b_n-\frac{4}{11}c_n \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{11}a_n - \frac{2}{11}b_n + \frac{1}{11}c_n$$
$$= -\frac{1}{11}(-a_n + 2b_n - c_n)$$
$$= -\frac{1}{11}y_n$$

Conclusion : $(y_n)_{n\geq 1}$ est suite géométrique de raison $q = \frac{-1}{11}$

et de premier terme $y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1 = -\frac{3}{8} + 0 - \frac{5}{8} = -1$

b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = y_1 q^{n-1} = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$

4- a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1}$
$$= -\frac{10}{11}a_n - \frac{15}{11}b_n - \frac{15}{11}c_n - \frac{20}{11}a_n - \frac{15}{11}b_n - \frac{20}{11}c_n + \frac{35}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n + \frac{28}{11}c_n$$
$$= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n - \frac{7}{11}c_n$$
$$= -\frac{1}{11}(5a_n - 5b_n + 7c_n)$$
$$= -\frac{1}{11}z_n$$

Conclusion : $(z_n)_{n\geq 1}$ est suite géométrique de raison $q = \frac{-1}{11}$

et de premier terme $z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1 = -\frac{15}{8} + 0 + \frac{35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

b) Donner pour tout entier naturel n non nul, l'expression de z_n en fonction de n.

Erreur! Signet non défini. $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = z_1 q^{n-1} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$

5- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3}(x_n + y_n) = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n - a_n + 2b_n - c_n) = \frac{1}{3}\times 3b_n = b_n$

$c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n) = \frac{1}{12}(5a_n + 5b_n + 5c_n - 5a_n - 5b_n + 7c_n) = \frac{1}{12}12c_n = c_n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et z_n

$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n + b_n + c_n = x_n$

d'où $a_n = x_n - a_n - b_n$
$$= x_n - \frac{1}{3}(x_n + y_n) - \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$$
$$= \frac{1}{12}(12x_n - 4x_n - 4y_n - 5x_n - z_n) = \frac{1}{12}(3x_n - 4y_n - z_n)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{12}(3x_n - 4y_n - z_n)$

c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = 1$, $y_n = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$ et $z_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$ d'après les questions 2 , 3 et 4

d'où

$\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{12}(3x_n - 4y_n - z_n) \\ &= \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} - \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n) = \frac{5}{12}x_n + \frac{1}{12}z_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1},\ b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1},\ c_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$

6- Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, et $(c_n)_{n\geq 1}$

$\lim_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < -\frac{1}{11} < 1$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4}$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}$ et $\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{5}{12}$

Remarque: on retrouve $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$

EXERCICE 6.

Déterminer une primitive de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$Df_1 = \mathbb{R}$

f_1 est continue sur Df_1 comme polynôme donc admet des primitives

$\forall x \in Df_1,\ F_1(x) = 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x$

Conclusion : $\forall x \in Df_1,\ F_1(x) = 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x$

Déterminer une primitive de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$

f_2 existe $\Leftrightarrow 1 + x^4 \neq 0 \Leftrightarrow x^4 \neq -1$ toujours vraie

$Df_2 = \mathbb{R}$

f_2 est continue sur Df_2 comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$f_2(x) = x^3(1+x^4)^{-2} = \frac{1}{4}4x^3(1+x^4)^{-2}$ On reconnaît On reconnaît $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 1+x^4$

$\forall\, x \in Df_2,\ F_2(x) = \frac{1}{4} \times \frac{(1+x^4)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{4(1+x^4)}$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\, x \in Df_2,\ F_2(x) = \frac{-1}{4(1+x^4)}}$

Déterminer une primitive de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = x(5x^2+1)^2$

$Df_3 = \mathbb{R}$

f_3 est continue sur Df_1 comme polynôme (ou produit de fonctions continues) donc admet des primitives

$f_3(x) = \frac{1}{10}10x(5x^2+1)^2$ On reconnaît On reconnaît $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 5x^2+1$

$\forall\, x \in Df_3,\ F_3(x) = \frac{1}{10}\frac{(5x^2+1)^3}{3} = \frac{1}{30}(5x^2+1)^3$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\, x \in Df_3,\ F_3(x) = \frac{1}{10}\frac{(5x^2+1)^3}{3} = \frac{1}{30}(5x^2+1)^3}$

Déterminer une primitive de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x - 2$

f_4 existe $\Leftrightarrow x > 0$ (car x est au dénominateur)

$Df_4 = \mathbb{R}_+^*$

f_4 est continue sur Df_4 comme somme de fonctions continues

$f_4(x) = x^{-\frac{1}{2}} + 2x - 2$

$\forall\, x \in Df_4,\ F_4(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{x^2}{2} - 2x = 2\sqrt{x} + x^2 - 2x$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\, x \in Df_4,\ F_4(x) = 2\sqrt{x} + x^2 - 2x}$

Déterminer une primitive de la fonction f_5 définie par $f_5(x) = \frac{5}{3x+1}$

f_5 existe $\Leftrightarrow 3x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$

$Df_5 = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

f_5 est continue sur chaque intervalle de Df_5 comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$\forall\, x \in Df_5,\ f_5(x) = \frac{5}{3x+1} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{3x+1}$

$\forall\, x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$, $F_5(x) = \frac{5}{3}\ln|3x+1| + 1$ pour changer j'ai pris 1 pour constante

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$, $F_5(x) = \frac{5}{3}\ln|3x+1|$

Conclusion : $\forall x \in \left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[$, $F_5(x)=\frac{5}{3}\ln|3x+1|+1$ e t $\forall x \in \left]-\frac{1}{3,}+\infty\right[$, $F_5(x)=\frac{5}{3}\ln|3x+1|$

Déterminer une primitive de la fonction f_6 définie par $f_6(x)=(1-x)^n$

$Df_6=\mathbb{R}$

f_6 est continue sur Df comme composé de fonctions continues donc admet des primitives

$\forall x \in Df_6,\ \ f_6(x)=(1-x)^n=-1(-(1-x)^n)$ On reconnaît On reconnaît $u'u^{\alpha}$ avec $u(x)=1-x$

$\forall x \in Df_6,\ \ F_6(x)=-1\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}=\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$

Conclusion : $\forall x \in Df_6,\ \ F_6(x)=\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$

Déterminer une primitive de la fonction f_7 définie par $f_7(x)=e^{-5x}+e^{2x}$

$Df_7=\mathbb{R}$

f_7 est continue comme somme de fonctions continues donc admet de primitives

$\forall x \in Df_7, F_7(x)=-\frac{1}{5}e^{-5x}+\frac{1}{2}e^{2x}$

Conclusion : $\forall x \in Df_7, F_7(x)=-\frac{1}{5}e^{-5x}+\frac{1}{2}e^{2x}$