CB N°03
Durée 4h

Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée

EXERCICE 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4}{1+e^x}$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

2- a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe f'
b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
c) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?
d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

3- a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$
b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

4- Tracer l'allure de la courbe représentative de f, les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.

5- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
b) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

6- Soit g la fonction définie sur $]0, 4[$ par $g(y) = \ln\left(\dfrac{4}{y} - 1\right)$ pour tout réel y de $]0, 4[$.
a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 4[$.
b) i. Pour tout $y \in\ ]0, 4[$, calculer $f(g(y))$
ii. Que représente la fonction g pour la fonction f ?
c) Déterminer les réels x tels que $0{,}05 \leq f(x) \leq 2$.

EXERCICE 2.

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$

1- Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de g
2- Calculer les limites aux bornes de Dg. On n'étudiera pas les branches infinies .
3- Dresser le tableau de variations de g .Vous donnerez une valeur exacte et approchée du minimum.
4- En déduire le signe de $g\,(x)$ pour x appartenant à Dg

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(x)}{x}$

et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- **a)** Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- **a)** Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f\,'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ où $f\,'$est la fonction dérivée de f
b) En déduire le signe de $f\,'(x)$ puis le tableau de variations de f .

3- **a)** Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution x_0
b) Montrer que x_0 appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.
c) Écrire un script `Python` permettant d'encadrer x_0 dans un intervalle d'amplitude 10^{-3}

On note D la droite d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$

4- **a)** Calculer la limite de $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et D. On appellera A le point intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D .
c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

5- Tracer $\mathscr{C}$, D et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE 3.

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1- a) Montrer la probabilité de l'évènement N est $\frac{2}{5}$

b) Déterminer $P_N(G)$ et $P_{\bar{N}}(G)$

c) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$.

d) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2- Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

EXERCICE 4.

Une usine a fabriqué 25 pièces indiscernables, dont 3 présentent un défaut.

1- On choisit au hasard une pièce parmi les 25 pièces fabriquées.
a) Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse. Vous donnerez le résultat sous forme décimale.
b) Une personne a besoin de 7 pièces non défectueuses. Combien doit-elle acheter de pièces au minimum pour être certaine de les avoir ?

2- On choisit simultanément 2 pièces au hasard parmi les 25 pièces fabriquées
a) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 pièces sans défaut ?

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut.

b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.
d) Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.

3- On suppose que l'usine fabrique un grand nombre de pièces. On suppose maintenant que 10% des pièces produites présente un défaut. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n pièces avec remise au hasard à la sortie de l'usine. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses prélevées.
a) Déterminer la loi de Y. On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout k de $Y(\Omega)$.
b) Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$

EXERCICE 5.

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geq 1}$,$(b_n)_{n\geq 1}$, et $(c_n)_{n\geq 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \frac{3}{8}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \frac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes:

pour tout entier naturel n non nul , $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} = \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} = \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \end{cases}$

1- Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geq 1}$,$(y_n)_{n\geq 1}$, et $(z_n)_{n\geq 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul, $x_n = a_n + b_n + c_n$, $y_n = -a_n + 2b_n - c_n$ et $z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n$

2- Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est constante.

3- **a)** Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{11}$

b) Donner pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.

4- **a)** Montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

b) Donner pour tout entier naturel n non nul, l'expression de z_n en fonction de n.

5- **a)** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et z_n

c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

6- Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geq 1}$,$(b_n)_{n\geq 1}$, et $(c_n)_{n\geq 1}$

EXERCICE 6.

1- Déterminer une primitive de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 2x^2 - 5x + 3$

2- Déterminer une primitive de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$

3- Déterminer une primitive de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = x(5x^2+1)^2$

4- Déterminer une primitive de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x - 2$

5- Déterminer une primitive de la fonction f_5 définie par $f_5(x) = \frac{5}{3x+1}$

6- Déterminer une primitive de la fonction f_6 définie par $f_6(x) = (1-x)^n$

7- Déterminer une primitive de la fonction f_7 définie par $f_7(x) = e^{-5x} + e^{2x}$