CHAPITRE 1 :
ENSEMBLE ET LOGIQUE

I- PRINCIPE DE RAISONNEMENT

1- LES QUANTIFICATEURS

La proposition “ l'hiver, il pleut ” a un sens vague. On peut comprendre que “ tous les jours d'hiver, il pleut ” ou bien que “ certains jours d'hiver, il pleut ”.
De façon analogue, la proposition “ $x = x^2$ ” est incomplète puisqu'elle peut signifier “ il existe au moins un nombre réel x tel que $x = x^2$ ” qui est une proposition vraie (0 par exemple) ou bien “ quel que soit le nombre réel x, nous avons $x = x^2$ ” qui est une proposition fausse ($2^2 \neq 2$).
Les expressions “ il existe **au moins un** ... ” noté $\exists$ et “ quel que soit ... ” noté $\forall$ s'appellent des quantificateurs. Ils servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété : “ tous ” ou “ certains ”.

Exemples : $\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[\ ,\ -x < 0$
$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = x$ Attention, en math, cela existe par exemple 0 et 1

2- NÉGATION DE PROPOSITIONS CONTENANT UN QUANTIFICATEUR

D'une façon générale, on forme la négation de la proposition :
- “ tous les A sont B ” en écrivant “ il existe au moins un A qui est non B ”
- “ il existe au moins un A qui est B ” en écrivant “ tous les A sont non B ”

donc la négation de $\forall$ est $\exists$ et de $\exists$ est $\forall$

Exemple : la négation de $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ f(-x) = f(x)$, est ....

Tous les garçons ont les yeux bleus, ...

II- ENSEMBLE ET ÉLÉMENTS

1- DÉFINITIONS

On appelle ensemble une collection d’objets. Ces objets s’appellent les éléments de l’ensemble.
On notera, en général, un ensemble en lettre majuscule et un élément en lettre minuscule.
Si E est un ensemble et x un élément de E on note $x \in E$ et on lit x appartient à E.

On peut écrire un ensemble de deux manières :

- **en extension** : c’est a dire en donnant entre accolades la liste de ces éléments .

Exemple : $E = \{0\ ;2\ ;4\ ;6...\}$

- **en compréhension** : c'est a dire en donnant toujours entre accolades ces éléments puis après une virgule, en les décrivant .

Exemple : $E=\{n,\ n \text{ entier naturel pair}\}$

2- EXEMPLES D'ENSEMBLE DE NOMBRES

$\mathbb{N} = \{n\ ,\ n \text{ entiers naturels}\} = \{0\ ;1\ ;2\ ;3..\}$

$\mathbb{Z} = \{x\ ,\ x \text{ entiers relatifs}\} = \{\ldots ; -3\ ; -2\ ; -1\ ; 0\ ; +1\ ; +2\ ; +3..\}$

$\mathbb{D}=\{x,\ x \text{ nombres décimaux}\}=\left\{x,\quad x=\dfrac{a}{10^p}\ ,\text{ avec } a\in\mathbb{Z} \text{ et } p\in\mathbb{N}\right\}$

$\mathbb{Q} = \{x\ ,\ x \text{ fractions rationnelles}\} = \left\{x,\ x=\dfrac{p}{q}\ avec\ p\in\mathbb{Z} \text{ et } q\in\mathbb{Z}^*\right\}$

Remarque : l'étoile écrite après l'ensemble signifie que l'on a ôté le zéro ainsi $\mathbb{Z}^*$ est l'ensembles des entiers relatifs sauf 0.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réelles . Il contient donc tous les nombres.

Exemple : $-3 \in$ .... mais $-3 \notin$ ....

Un ensemble est caractérisé par la donnée de ses éléments. La manière la plus simple de définir un ensemble consiste à dresser la liste de ses éléments :

- Le singleton : $\{a\}$ est un ensemble formé d'un seul élément.
- La paire : $\{a,b\}$ est un ensemble formé de deux éléments. Ne pas confondre avec le couple (a,b) où l'ordre des éléments intervient.

Cependant il n'est pas toujours possible de dresser la liste de tous ses éléments :

- Soit parce qu'il y a trop d'élément : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des ensembles qui possèdent une infinité d'éléments.
- Soit parce qu'il n'y en a pas ! c'est l'ensemble vide noté....................

Remarque: Soit E un ensemble **comportant un nombre fini d'éléments,** on appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E et on le notera Card(E) ou $|E|$ ou encore $\#E$

Ainsi Card $(\{a\})=$................

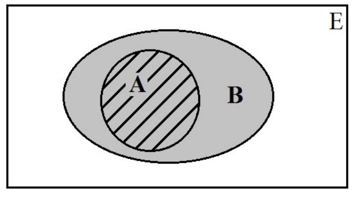
Card $(\varnothing)$ $=$................

Card$(\{a,b\})=$................

3- INCLUSION ET EGALITÉ

Soient A et B deux sous ensembles de E.

On dit que A est inclus dans B si tout élément de A est un élément de B. On note $A\subset B$.



On dit que A et B sont égaux (on note $A = B$) si $A\subset B$ et $B\subset A$.

Exemples : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\{1\ ; 2\ ; 3\} \subset$ ....

$\{1\ ; 2\ ; 3\} =$ ....(dans un ensemble il n'y a pas d'ordre}

4– ENSEMBLE DES PARTIES (SOUS ENSEMBLE) DE *E*

Soit E un ensemble.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties (sous ensemble) de E.

Exemple : $\mathscr{P}(\{1\,;2\,;3\}) = \{\varnothing\ ;\{1\}\ ;\{2\}\ ;\{3\}\ ;\{1\,;2\}\ ;\{1\,;3\}\ ;\{2\,;3\}\ ;\{1\,;2\,;3\}\}$

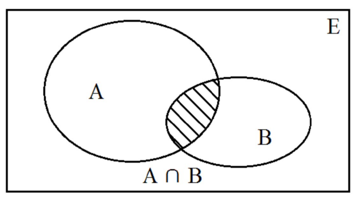
Remarque : Par convention l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles : $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$

5– OPÉRATION SUR $\mathscr{P}(E)$

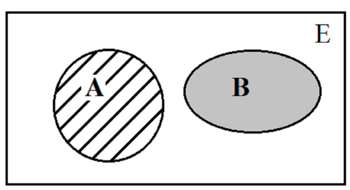
Soit E un ensemble et A , B deux sous ensembles de E on définit :

L'intersection de *A* et *B*

L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A **et** dans B : donc $A\cap B = \{ x \in E$ tel que $x \in A$ **et** $x \in B\}$



Remarque 1 : On dit que deux parties A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

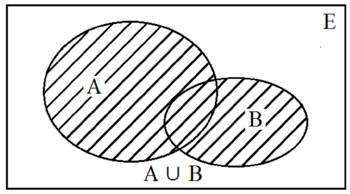


Remarque 2 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap B = B \cap A$ on dit que l'intersection est commutative
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ on dit que l'intersection est associative
- $A \cap A = A$
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$

La réunion de A et B

La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A **ou** dans B donc $A\cup B = \{ x \in E$ tel que $x \in A$ **ou** $x \in B\}$



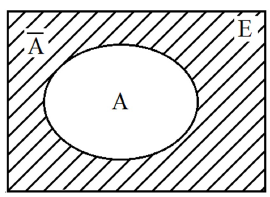
Remarque 1 : Propriétés de l'union

- $A \cup B = B \cup A$ on dit que la réunion est commutative
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ on dit que la réunion est associative
- $A \cup A = A$
- Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ On dit que l'intersection et la réunion sont distributives l'une de l'autre

Le complémentaire de A dans E

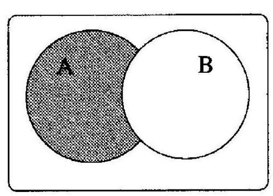
Le complémentaire de A dans E, note $\overline{A}$ est constitué de tous les éléments de E ne sont pas dans A donc $\overline{A} = \{ x \in E$ tel que $x \notin A\}$



Remarque : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$

La différence de A et B

La différence de A et B dans E, noté $A \setminus B$ est constitué de tous les éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B donc $A \setminus B = \{ x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \notin B\}$



Remarque : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

En ....

Exemple

Soit $E = \{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\ ;7\ ;8\ ;9\ ;10\}$ En ....

$A = \{x \in E,\ x$ est multiple de $3\}$ et $B = \{1\ ;7\ ;9\}$

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$,$A \setminus B$,en extension et représenté la situation par un diagramme de Venn.

6- Loi de Morgan

$\overline{A \cup B} =$ ....

$\overline{A \cap B} =$ ....

7- Produit cartesien

Soient E et F deux ensembles.

On note $E*F$ l'ensemble des couples (x,y) où x , la première composante du couple, est un élément de E et y , la deuxième est un élément de F . attention il y a un ordre .

Cet ensemble se prononce E croix F.

Plus généralement, si E_1 , E_2 , ...E_n sont n ensembles, on note $E_1 * E_2 * ... * E_n$ l'ensemble formé des n-uplets de la forme $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ x_n)$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.. ; $x_n \in E_n$

Si, en outre $E_1 = E_2 = ... = E_n$ alors l'ensemble $E_1 * E_2 * ....*E_n$ est noté E^n.

Exemples :

$(-3\ ;\ \pi)$ est un élément de $\mathbb{Z}*\mathbb{R}$ car $-3 \in$ ....et $\pi \in$ ....

Par contre $\left(\frac{1}{2}\ ;\sqrt{2}\right)$ n'est pas un élément de $\mathbb{Z}*\ \mathbb{R}$ car ....

$\mathbb{R}^4$ désigne les 4-uplets de la forme $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ ;\ x_4)$ tel que les quatre éléments x_1 , x_2 , x_3 , x_4 sont des nombres réels.

8- Partition

Soient E et I deux ensembles.

Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E.

On dit que la famille $(E_i)_{i \in I}$ est une partition E (ou un système complet d'évènements en probabilité) si et seulement si $\bigcup_{i \in I} E_i = E$ et si $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j,\ E_i \cap E_j = \varnothing$

Exemple : $E = \mathbb{N}$, $E_1 = \{$nombres pairs$\}$, $E_2 = \{$nombres impairs$\}$