CHAPITRE 2 : PROBABILITE

I- VOCABULAIRE

1- EXPÉRIENCE ALÉATOIRE[1]

C'est une expérience dont on connaît **parfaitement** les conditions de déroulement et dont on ignore l'issue, le résultat dépend du hasard[2].

Exemples :

1) Si la pièce est équilibrée et n'est pas tombée sur la tranche, jeter une pièce et noter le résultat obtenu. Le résultat (aléatoire) est ici pile ou face.
2) Si le dé est non truqué et qu' il a 6 faces, lancer un dé et noter le résultat obtenu. Le résultat (aléatoire) est ici un entier compris entre 1 et 6.
3) Si le jeu est non truqué dans un jeu de 32 cartes, choisir au hasard 1 carte dans un jeu de trente-deux cartes. Le résultat est un sous-ensemble a 1 élément de l'ensemble des trente-deux cartes.
4) Si le jeu est non truqué dans un jeu de 32 cartes, choisir au hasard cinq cartes dans un jeu de trente-deux cartes. Le résultat est un sous-ensemble a cinq éléments de l'ensemble des trente-deux cartes.
5) Choisir un humain au hasard et noter sa taille. Le résultat est un nombre réel.
6) Lancer (successivement) trois dés non truqués à 6 faces et noter les résultats obtenus.
7) On considérera même parfois des expériences aléatoires qui sont, en pratique, impossible à réaliser. Par exemple : lancer un dé une infinité de fois et noter tous les résultats. Les résultats possibles sont ici les suites infinies $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ où chaque x_i est un entier compris entre 1 et 6.

2– INVENTAIRE (UNIVERS DES POSSIBLES).

L'inventaire ou l'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le notera Ω.

Exemples :

Ω_1 =

Ω_2 =

Ω_3 =

Ω_4 =

Ω_5 =

Ω_6 =

[1] Aléatoire : vient du latin *alea*, qui signifie jeu de dés.
[2] Hasard : vient de l'arabe *az-zahr*, qui signifie le dé.

3- Événements [3]

Un événement est une partie (sous-ensemble) de Ω.
On appelle événement élémentaire tout événement qui a un unique élément.
Décrire un événement, c'est citer l'ensemble des résultats issus de l'action ou de la situation qui lui correspond.

- Dans Ω_1 , il y a … événements :

(…….est l'événement impossible ; ……… est l'événement certain)

- Dans Ω_2 , on peut, par exemple, considérer l'événement, que nous noterons A.
  A = " Avoir une face paire ". L'événement A est réalisé lorsque le résultat est 2, 4 ou 6. On écrit alors $A = \{2\ ;4\ ;6\}$.
  L'événement A = " Avoir une face paire " est la réunion des événements :
  A_1 = " avoir 2 ", A_2 = " avoir 4 ", A_3 = " avoir 6 ".
  A se décompose en A_1 ou A_2 ou A_3 et on note $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, et les événements A_1, A_2, A_3 sont élémentaires, car non décomposables en événements plus simples.

Propriétés

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A, c'est à dire " non A ", est représenté par le complémentaire de A que l'on note …….
- L'événement " A et B sont réalisés " est représenté par …… .
- L'événement " A ou B est réalisé " est représenté par …….
- On dit que les événements A et B sont ………. s'il ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est à dire si …….
- L'événement " A est réalisé et B n'est pas réalisé " est représenté par …….
- On dit que A implique B, si la réalisation de A entraîne la réalisation de B, c'est à dire si …….

4- Pondération

Une pondération est une application notée p de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0\ ;\ 1]$.
La probabilité est le résultat de la pondération.

Probabilité de E (nombre)

$$p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\ ;\ 1]$$
$$E \mapsto p(E)$$

de telle manière que p satisfasse les axiomes de Kolmogorov (mathématicien russe 1930)

- $p(\Omega) = 1$. C'est-à-dire que la probabilité de l'événement certain est égale à 1.
- Deux événements $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- Si $A \cap B = \varnothing$ (A et B sont disjoints : notation ensembliste ; A et B sont incompatibles : notation probabiliste).
  Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

[3] Evénements : vient du latin *evenire* qui veut dire arriver.

Ceci s'appelle la σ–additivité, ou additivité dénombrable (si les événements ne sont pas deux à deux disjoints, cette relation n'est plus vraie en général).

<u>Propriétés :</u>

1) $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$
2) $\boldsymbol{p(A \backslash B) = p(A) - p(A \cap B)}$
3) $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$
4) **Si** $\boldsymbol{A \subset B}$ **alors** $\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$
5) $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$
6) **<u>Généralisation :</u> Formule de POINCARE Henry**

$$p\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} p(A_i) - \sum_{i<j} p(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

<u>Cas particulier :</u>

$n = 2$, $P(A_1 \cup A_2) =$ ……………………………………………………………………….

$n = 3$, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$ ………………………………………………………………
…………………………………………………………………………. ……………………………………

Evidemment si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ forme une partition de E, on retrouve $p\left(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} p(A_i)$

<u>Conséquence :</u>
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

<u>Exemples :</u>
On joue avec un dé pipé à six faces. Les probabilités d'apparition de chaque face sont données par le tableau de répartition suivant : (on lance le dé une seule fois)

face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,18	0,16	0,18	0,16	0,12

Pour chaque événement suivant, donner l'ensemble des résultats qui lui correspondent, puis sa probabilité.

a) E = "obtenir la face 1 " = {……}. $P(E) =$

b) A = "obtenir une face paire " = {…………} . $P(A) =$

c) B = "obtenir une face de 1 à 6 ". = {…………………} . $P(B) =$

d) C = "obtenir une face supérieure ou égale à 4" = {………..} $P(C) =$

e) $A \cap C$ = {………..} . $P(A\cap C) =$

f) $A \cup C$ = {……………….} . $P(A\cup C) =$

g) J = "obtenir un des chiffres 4 2 1" = {…………} $P(J) =$

h) L = "obtenir aucun des chiffres 4 2 1" = {…………..} $P(L)$ =

i) K = "n'obtenir ni 1 ni 6 " = {……………} $P(J)$ =

II- ÉQUIPROBABILITÉ

1- DÉFINITION

Lorsqu'à l'issue d'une action tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître, alors il y a équiprobabilité (égale-probabilité).

Exemples :

- ♦ Le jet d'une pièce de monnaie, avec les événements "obtenir le côté PILE " et " obtenir le côté FACE ".
- ♦ Interroger une personne **au hasard**, **indifféremment**, de **façon aléatoire**
- ♦ Tirer une boule parmi 6 boules **indiscernables** au toucher.
- ♦ Prendre un nombre entier **quelconque** d'un jeu bien battu sans tricher.
- ♦ Jouer avec un dé **non pipé**.

Tous les mots en gras indiquent **une situation d'équiprobabilité**.

2- THÉORÈME

Soit E une expérience aléatoire et Ω son inventaire.
$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
On dit qu'il y a équiprobabilité si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité ie $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \dots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}$.

♥ **S' il y a équiprobabilité alors :** $\boxed{P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$

Exemples :

1- Dans un jeu de 32 cartes, bien battu, on tire une seule carte au hasard.
Quelle est la probabilité (en fraction irréductible) de tirer :

a) Le roi de cœur ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

b) Un as ?

....

....

....

....

c) Un valet ou une dame ?

....

....

....

....

d) Un roi et une dame ?

....

....

....

....

2– Dans une classe de 38 élèves, 26 apprennent l'espagnol, 15 l'allemand dont 8 également l'espagnol.

- **a)** Quel est le nombre d'élèves qui n'apprennent aucune de ces langues ?
- **b)** On rencontre un de ces élèves par hasard. Quelle est la probabilité pour que cet élève soit un germaniste non hispanisant ? Ne soit ni germaniste, ni hispanisant ?