CHAPITRE 3 : PROBABILITE CONDITIONNELLE

I– INTRODUCTION

Ci–contre figure le tableau de distribution des fiches d'élèves d'un lycée susceptibles de présenter des concours selon deux critères le classe et l'option

		Section		
		EC	CPENS	Total
Niveau	Espagnol	70	80	150
	Italien	30	48	78
	Total	100	128	**228**

On note : E l'évènement "Est élève de l'option espagnol",

$\overline{E}$ l'évènement "Est élève de l'option italien",

C l'évènement "Est en section CPENS ",

$\overline{C}$ l'évènement "Est en section EC",

Calculer les probabilités suivantes :

$P(E)$ = ………………………………………………………………………………………………...

$P(\overline{C})$ = ……………………………………………………………………………………………

$P(\overline{C} \cap E)$ = …………………………………………………………………………………………

Calculer la probabilité que l' élève soit inscrit en section EC, **sachant** qu'il apprend l'espagnol

………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..………………………………………………………………………………………………….
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..………………………………………………………………………………………………….
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..………………………………………………………………………………………………….
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..………………………………………………………………………………………………….
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..…………………………………………………………………………………………………..
………..………………………………………………………………………………………………….

Remarque :
La probabilité de l'évènement " est inscrit en section EC, **sachant** qu'il apprend l'espagnol " est dite probabilité conditionnelle.
La probabilité conditionnelle de l'évènement EC sachant espagnol est notée $P(\overline{C} \mid E)$ ou $P_E(\overline{C})$.

En utilisant les fractions non simplifiées obtenues précédemment , exprimer $P_E(\overline{C})$. à l'aide de deux des nombres $P(E)$,$P(\overline{C})$,$P(E \cap \overline{C})$

……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………………….

II– PROBABILITE CONDITIONNELLE

1- DEFINITION

Si $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $P_A(B)$ ou $P(B \mid A)$, est définie par :

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

2– PROBABILITE DE $A \cap B$

De $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ on a :

- $\boldsymbol{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$
- $\boldsymbol{P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)}$

Remarque 1 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Donc** $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$

3– PROPRIETES

a) $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
b) Si $C \subset B$ alors $P_A(C) \leq P_A(B)$
c) $P_A(C \cup B) = P_A(C) + P_A(B) - P_A(C \cap B)$
d) La formule de Poincaré reste vraie en remplaçant P par P_A

Exemple

2. Dans un lycée il y a 55% des élèves sont des filles , 22% des filles et 18% des garçons étudient l'allemand. On choisit au hasard un élève du lycée

On note : F l'évènement "l'élève est une fille ", D l'évènement "l'élève étudie l'allemand ",

a) Traduire les pourcentages données en terme de probabilité à l'aide des événement F et D

……
……
……
……
……
……

b) Calculer la probabilité que l'élève choisit apprenne l'allemand et qu'il soit un garçon

……
……
……
……
……

c) Calculer la probabilité que l'élève choisit apprenne l'allemand et qu'il soit une fille

……
……
……
……
……

d) Calculer la probabilité que l'élève choisit apprenne l'allemand

……
……
……
……
……
……
……
……

4– FORMULES DES PROBABILITES TOTALES

Dire que des évènements forment une partition de Ω (on dit aussi un système complet d'évènements) des issues possibles signifie que la réunion des évènements est Ω et qu'ils sont 2 à 2 disjoints

A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω car $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$

Pour tout évènement B on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

$$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}))$$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) - P((B \cap A) \cap (B \cap \overline{A})) \text{ or } (B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing$$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$\boldsymbol{P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

On généralise
Ω est l'ensemble des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire. Les évènements A_1, A_2, ..., A_m forment une partition de Ω lorsque Ω est la réunion des évènements A_i et que les évènements A_i sont deux à deux incompatibles.

A_1, A_2, ..., A_m forment une partition de Ω, la probabilité d'un évènement B est donnée par événements, de probabilité non nulle.

$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_m)}$$

<u>Remarque :</u>
L'utilisation de ces formules est souvent facilité par un arbre pondéré.

III- REPRESENTATION A L'AIDE D'UN ARBRE PONDERE

1- <u>SAVOIR CONSTRUIRE ET UTILISER UN ARBRE PONDERE</u>

Un sac contient 10 boules rouges et 7 boules jaunes. A l'intérieur de chaque boule, il y a une bille de terre ou une bille de verre. Toutes les boules ont le même poids, quelque soit la nature de la bille à l'intérieur.

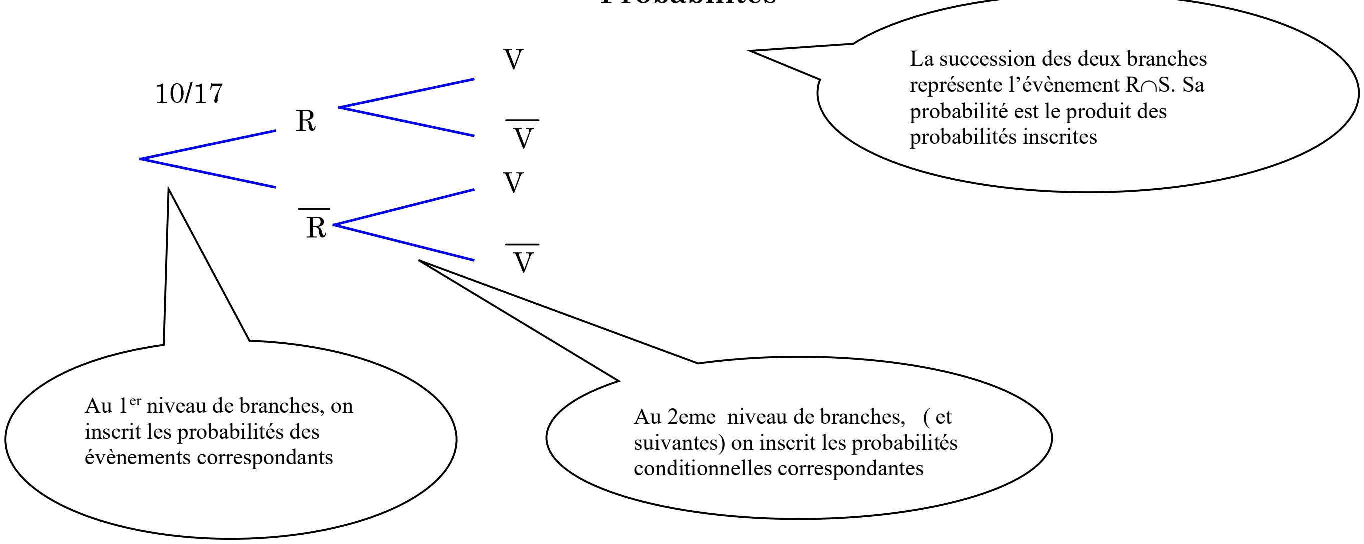
Bille / boule	Terre	Verre	total
Rouge	3	7	10
Jaune	5	2	7
total	8	9	17

On tire une boule au hasard, on l'ouvre et on observe la bille quelle contient.
On considère les évènements :
R : “ la boule tirée est rouge ”
V : “ la boule tirée contient une bille de verre ”

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(\mathrm{R})$, $P(\overline{\mathrm{R}})$, $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{V})$, $P_{\mathrm{R}}(\overline{\mathrm{V}})$

………
………
………
………
………
………
………

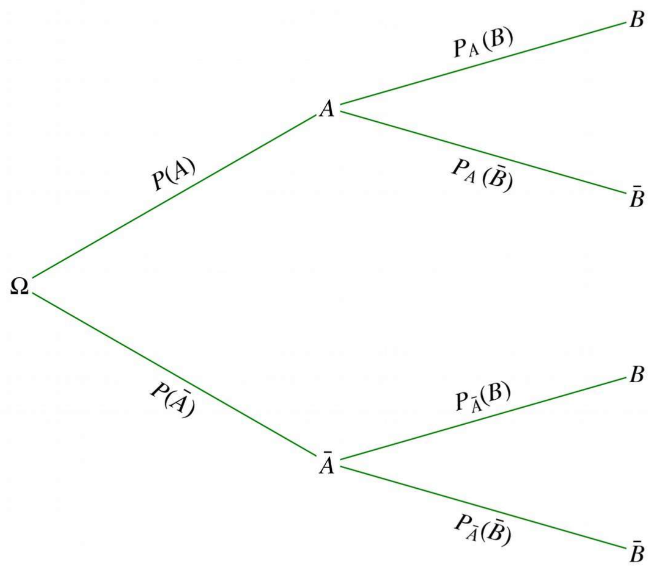
2) représenter la situation par un arbre pondéré



<u>Exemple</u>

Une société comprend 40% de cadres. De plus 20% des cadres et 5% des autres employés parlent anglais. On interroge au hasard un employé de la société et on considère les évènements suivants :
C : " l'employé interrogé est un cadre "
A : " l'employé interrogé parle anglais "
1– Traduire, à l'aide des évènements A et C , les données de l'énoncé en terme de probabilité
2– Représenter la situation par un arbre pondéré
3– Calculer la probabilité que l'employé interrogé soit un cadre parlant anglais
3– Calculer la probabilité que l'employé interrogé parle anglais

Conclusion:



2- FORMULE DE BAYES (THOMAS)

Exemple :

Dans une certaine population, il y a 50% de femmes, 40% d'hommes et 10% d'enfants
Parmi les femmes, il y a 30% de fumeurs
Parmi les hommes il y a 40% de fumeurs
Parmi les enfants, il y a 100% de non fumeurs
On entre dans une pièce il y a des fumeurs
Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

3- FORMULE DES PROBABILITES COMPOSEES

Soit $(\Omega\,;\,P)$ un espace probabilisé
et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Commentaire :
Cette formule est très intuitive, si nous souhaitons calculer la probabilité que les événements A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n , soient simultanément réalisés, il faut **tout d'abord** que A_1 soit réalisé, **puis** maintenant que l'on **sait que** A_1 **est réalisé**, il faut que A_2 soit réalisé, **puis** maintenant que l'on **sait que** A_1 et A_2 **sont réalisés** il faut que A_3 soit réalisé, etc ...

Exemple : On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires.

- $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires
- $\mathscr{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 boules noires
- $\mathscr{U}_3$ contient 6 boules blanches et 1 boule noire

On effectue trois tirages successifs suivant le même protocole : la boule tirée dans une urne est remise dans la suivante.

- on tire une boule de l'urne $\mathscr{U}_1$, on note sa couleur,
- on met cette boule dans l'urne $\mathscr{U}_2$
- on tire une boule de l'urne $\mathscr{U}_2$, on note sa couleur
- on remet cette boule dans l'urne $\mathscr{U}_3$
- on tire une boule de l'urne $\mathscr{U}_3$, on note sa couleur.

Quelle est la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur ?

Notons B_i (resp. N_i) l'événement la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche (resp. noire).
On cherche $P(\,(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)\,)$.

On peut représenter les tirages successifs dans un arbre :