# CHAPITRE 5 :
# EQUATIONS - INEQUATIONS (2)

## I- POLYNÔMES

### 1- DÉFINITION D'UN POLYNÔME

On appelle fonction polynomiale réelle en $x$ ou simplement polynôme réel en $x$ une expression de la forme $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_0$ , $a_1$ , ... , $a_n$ appartenant aux nombres réels , $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

Exemples :

$x^2 + 3x + 1$ ……………………………………………………………………………………

$x^{-2} + x - 1$ ……………………………………………………………………………………

$\sqrt{x} + 3$ ……………………………………………………………………………………

Remarque :

Les nombres $a_0$ , $a_1$ , ... , $a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme.

### 2- DEGRÉ D'UN POLYNÔME

Soit $P$ un polynôme en $x$,
On appelle degré de $P$ , le plus grand exposant (la plus grande puissance) de $x$.

Exemples : $P(x) = x^2 + 3x + 1$ est un polynôme de degré ………………………………

$P(x) = 7$ est un polynôme de degré ………………………………………

$P(x) = 3x+1$ est un polynôme de degré ………………………………………

$P(x) = 0$ est un polynôme de degré ………………………………………

Remarque :

Le polynôme de degré 0 est une …………………………

Le polynôme de degré 1 est une fonction affine $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Le polynôme de degré 2 est une fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
où $a$ est le coefficient de $x^2$
$b$ est le coefficient de $x$
$c$ est le terme constant

## 3- RACINE D'UN POLYNOME

Si le nombre $a$ est solution de l'équation $P(x)=0$ alors $a$ est appelé racine ( ou zéro) du polynôme $P$.

Exemple : 1 est racine du polynôme $P$ définie par $P(x) = x^3+3x-3x-1$.

Remarque: on appelle racine évidentes les nombres 0, 1, -1, 2, -2 et 3, -3

## 4- ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

On désire résoudre $ax^2 + bx + c = 0$
On commence par déterminer l'ensemble de définition
Puis on calcule le discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2-4ac}$

| | Nombre de solutions | Les solutions | Factorisation de $P(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | | | |
| $\Delta = 0$ | | | |
| $\Delta < 0$ | | | |

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 + x - 1$

**1**– Résoudre l'équation $P(x) = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$a =$ $b =$ et $c =$

$\Delta = b^2 - 4ac = (\quad)^2 - 4\times \quad \times(\quad) =$

$\Delta \quad 0$ donc l'équation admet

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} =$

**2**– Factoriser le polynôme $P$

Les solutions de $2x^2 + x - 1 = 0$ sont

d'où $P(x) =$

**Ne pas oublier**

Remarque :Trouver la deuxième racine quand on en connaît une

$132x^2 + 23x - 109 = 0$

On remarque que ………………………… est racine évidente

donc $132x^2 + 23x - 109 =$

et par suite la deuxième racine est

## II- ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 3

### 1- THÉORÈME FONDAMENTAL

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n$

Si $a$ est une racine de $P$ alors $P(x)$ se factorise par $(x-a)$ autrement dit

Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ , $P(x) = (x-a)\, Q(x)$

Exemple

1 est racine du polynôme $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 11x - 1$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ , $P(x) = (x - 1)\, Q(x)$ .

### 2- DÉTERMINATION DE $Q(X)$

Il existe différentes méthodes pour déterminer le polynôme Q(x) :

- Division euclidienne,
- Méthode par identification,
- Méthode HORNER,

#### a) Division euclidienne

Donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$ , $5x^3+7x^2-11x-1 =$ ……………………………………………………………………

#### b) Méthode d'identification

$P(x) = 5x^3+7x^2-11x-1$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ , $P(x) = (x - 1)\ Q(x)$

$Q(x)$ sera un polynôme de degré ………………………… i.e. $Q(x) =$ …………………………

Donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $5x^3+7x^2-11x-1 = (x - 1)$

$(a,b,c)$ sont solutions du système

Donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$ , $5x^3+7x^2-11x-1 = (x-1)$

Remarque : méthode d'identification de tête

$5x^3+7x^2-11x-1 = (x - 1)$ ............................

donc il ne reste plus qu'à déterminer $b$ en utilisant les termes de degré 2 ou 1 ( au choix)

c) Méthode de HÖRNER

$P(x)=5x^3+7x^2-11x-1$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ , $P(x) = (x - 1)\ Q(x)$

Pour déterminer $Q(x)$ , nous allons utiliser cette fois la méthode de HORNER qui est plus rapide.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Coefficients de P($x$) | | | | |
| Racine de P($x$) : **1** | | | | |
| Coefficients de Q($x$) | | | | |

Donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$ , $5x^3+7x^2-11x-1 = (x-1)$

## III- INÉQUATIONS

### 1- INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRE

a) Rappels

- Une inéquation est inchangée si on ajoute ou si on soustrait à droite et à gauche le même nombre.
- Une inéquation est inchangée si on multiplie ou si on divise à droite et à gauche le même nombre positif.
- Une inéquation change si on multiplie ou si on divise à droite et à gauche le même nombre négatif.
- Le produit en croix est interdit

b) Tableau de signes d’une fonction affine

$f(x) = ax + b$

Donc le tableau d’étude de signes de $f$ est

Valeur qui annule $ax + b$

| $x$ | $-\infty$ | $-b/a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 0 | |

ou axe

<u>Exemple</u> : Etudier le signe de la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 0 | |

ou axe :

## 2- <u>INÉQUATIONS DU SECOND DEGRE</u>

| | Nombre de solutions | Tableau d’étude de signes | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| | | $P(x)$ | | |
| $\Delta = 0$ | | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| | | $P(x)$ | | |
| $\Delta < 0$ | | $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| | | $P(x)$ | | |

Exemple : Résoudre $2x^2 + x - 1 > 0$

**Méthode**
1. **Déterminer l'ensemble de définition**
2. **Résoudre l'équation**
3. **Faire un tableau de signes**
4. **Conclure**

**1.** Ensemble de définition

**2.** Résolution de l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$

Les solutions de $2x^2 + x - 1 = 0$ sont $x_1 =$ et $x_2 =$

**2.** Tableau d'étude de signes

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $2x^2 + x - 1$ | |

ou axe

**3.** Conclusion

## 3- Inéquations de degré supérieur ou egal a 3

Résoudre $5x^3+7x^2-11x-1>0$

**Méthode**
1. **Déterminer l'ensemble de définition**
2. **Chercher une racine évidente**
3. **Factoriser le polynôme**
4. **Faire un tableau de signes**
5. **Conclure**