CHAPITRE 7 : LOGARITHME NÉPÉRIEN ET EXPONENTIELLE (1)

I- UNE NOUVELLE FONCTION

1. APPROCHE

On désire résoudre l'équation $e^x = a$ suivant les valeurs de a

- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car une exponentielle est toujours positive
- si $a = 0$ l'équation n'a pas de solution car une exponentielle ne s'annule jamais
- si $a > 0$ on admet (voir théorème de la bijection au 2ème semestre) que l'équation admet une unique solution noté ln(a).

Remarque 1:
Pour tout réel x et tout réel $y > 0$, $y = e^x$ équivaut à $\ln y = x$.
On dira que la fonction logarithme népérien est la **réciproque** de la exponentielle et vice versa.

Remarque 2 : $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = ...$ $e^1 = e$ donc $\ln(e) = ...$

2. DÉFINITION

♥

- **La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$**
- **$\ln(1) =$** **$\ln(e) =$**
- **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) =$**
- **Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} =$**

Remarque 3: valeurs à connaître par cœur
$\ln(2) \approx$ **$\ln(3) \approx$**

II- RÈGLE DE CALCULS

1. RAPPEL SUR L'EXPONENTIELLE

Une valeur approchée de e est 2,71828…

La fonction **exponentielle**, notée ***e*** ou **exp,** est la fonction $x \mapsto e^x$ et se lit “ exponentielle de x ” ou “ e puissance x ”

Exemple : $\exp(1) = e^1 \approx$

Puisque l'exponentielle est une puissance, on retrouve toutes les propriétés de calculs des puissances :

♥

- **Pour tous réels x et y, $e^{x+y}=$**
- **Pour tous réels x et y, $(e^{x})^{y}=$**
- **Pour tout réel x, $e^{-x}=$**
- **Pour tous réels x et y, $e^{x-y}=$**

Exemples :

$e^{5+2x}=$

$e^{3x-5}=$

$e^{x-\ln(2)}=$

$\dfrac{e^{x}}{e^{2x+1}}=$

$e^{x}e^{-x}=$

2. RÈGLES DE CALCULS DES LOGARITHMES

♥

- $\forall\ a>0, \forall\ b>0$, $\ln(ab)=$
- $\forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ a>0$ $\ln(a^{x})=a$
- $\forall\ b>0$, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-$
- $\forall\ a>0, \forall\ b>0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=$

Remarque :

$\forall x>0$, $\ln\sqrt{x}=\ln(x^{1/2})=\dfrac{1}{2}\ln x$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x=x\times1=x\times\ln \mathrm{e}=\ln \mathrm{e}^{x}$

Exemple :

$\ln(72)=$

$38=\ln$

III- ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC LN ET EXPONENTIELLE

1. PRINCIPE

♥

- **Pour faire disparaître l'exponentielle, on utilise le logarithme népérien**
- **Pour faire disparaître le logarithme népérien, on utilise l'exponentielle**

2. EXEMPLES D'ÉQUATIONS

Méthode

① Chercher le domaine d'existence de l'équation

② Résoudre l'équation en se ramenant à des équations du type:

$\ln(u)=\ln(v)$ $\qquad$ $e^u=e^v$

$\ln(u)=a$ $\qquad$ $e^u=a$

et utiliser ln ou exp

③ Conclure

- Résoudre l'équation $\ln(3x-2)=4$

①

②

③ $S=$

- Résoudre l'équation $e^{3x-2}=1$

①

②

③ $S=$

♦ Résoudre l'équation $e^{x+1} = -3$

①

②

③ $S =$

♦ Résoudre l'équation $\ln(x)+\ln(x-1) = \ln(2)$

①

②

③ $S =$

3. EXEMPLES D'INÉQUATIONS

Méthode

① Chercher le domaine d'existence de l'équation

② Résoudre l'équation en se ramenant à des équations du type:

$\ln(u)<\ln(v)$ $\quad$ $e^u<e^v$

$\ln(u)<a$ $\quad$ $e^u<a$

et utiliser ln ou exp

③ Conclure

♦ Résoudre l'équation $\ln(3x-2) < 4$

①

②

③ $S =$

♦ Résoudre l’équation $e^{3x-2} > 1$

①

②

③ $S =$

♦ Résoudre l’équation $e^{x-2} < 0$

①

②

③ $S =$

4. UN CAS FONDEMMENTAL : SIGNE DE LN(X)

On désire connaître le signe de $\ln(x)$ aussi on va résoudre l'inéquation $\ln(x) \geq 0$
$\ln(x) \geq 0$

① $D = \mathbb{R}_+^*$

②

③ $S =$

d'où **le tableau de signes à connaître**

♥

x		
$\ln(x)$	$\|\|$	

<u>Exemples :</u>

$\ln \dfrac{1}{3}$ car

$\ln 4$ car