CHAPITRE 8 : DÉRIVATION

I- DÉRIVABILITÉ

1- DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un nombre a.
On dit que f est dérivable en a lorsque le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est le nombre dérivé de f en a.
On le note $f'(a)$ et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Remarque 1 : le nombre $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle taux d'accroissement.

Remarque 2 :
f est dérivable sur I, un intervalle, si et seulement si f est dérivable en tout point de I.
On dit que la dérivabilité est une propriété locale.

2- CONDITION DE DÉRIVABILITÉ

Toutes les fonctions connues sont dérivables sur les intervalles de leurs ensembles de définition, à l'exception de :

- Les racines aux points où elles s'annulent
- Les valeurs absolues aux points où elles s'annulent
- Les fonctions définies par morceaux

Exemple :
La fonction $x \mapsto |x+2|$

3- INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DE LA DÉRIVATION

Le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(a, f(a))$ (dans l'hypothèse où ce coefficient directeur et cette tangente existent !)

Remarque 1:

- Si $f'(a) = 0$

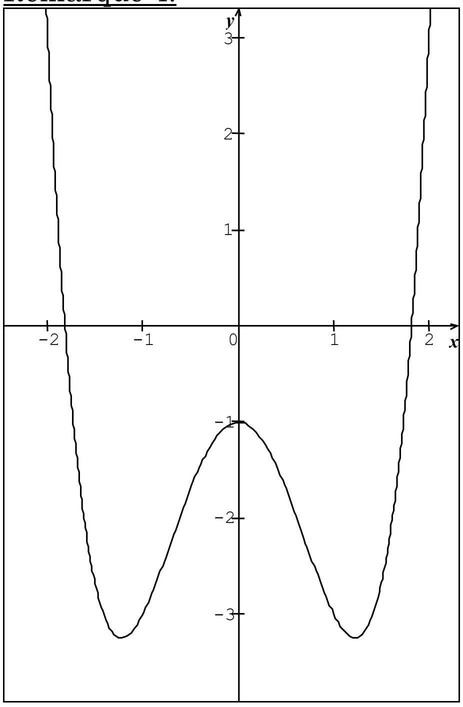
- Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$

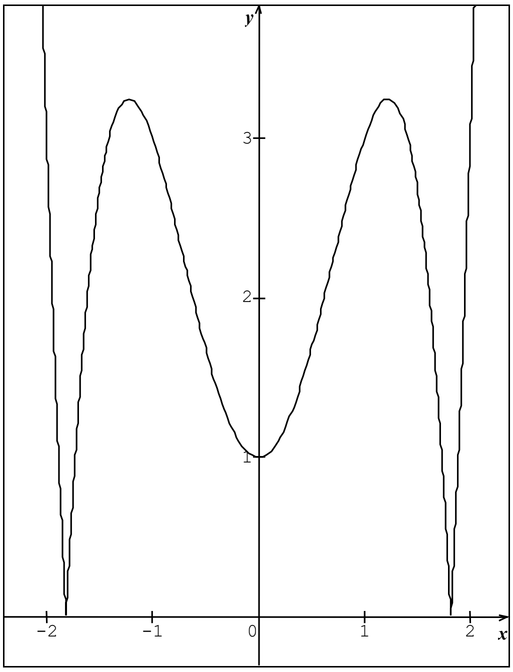
Remarque 2:
Soit f une fonction dérivable en une valeur a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a.
Ne pas confondre avec $f(a)$ qui est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

Remarque 3: Equation cartésienne de la tangente à une courbe.
Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère

Une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par A (a , $f(a)$) est :

Remarque 4:





Une des deux fonctions est dérivable en tous points?

II- FONCTION DÉRIVÉE

1- DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur Df et dérivable sur E
La fonction : $E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto$ nombre dérivé de f en x
s'appelle fonction dérivée de f, ou simplement dérivée de f et se note f'.

Exemple : Déterminer la dérivée de f définie par $f(x) = x^2$

Remarque 1 : f' est-elle même une fonction, on peut donc la dériver, on obtient $(f')' = f''$ appelée dérivée seconde. On peut à nouveau dériver et on obtient la dérivée troisième f''',...., $f^{(n)}$.

Exemple :
Déterminer les dérivées successives de f définie par $f(x) = x^2$

2- DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

FONCTIONS USUELLES		
$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur..... (i.e. f' est définie sur ....)
k (constante)		$\mathbb{R}$
$mx + p$		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
x^n		$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$		chaque intervalle de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt{x}$		$]0\ ;\ +\infty[$
$\ln(x)$		$]0\ ;\ +\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$

3- OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle E

$f(x)$	$f'(x)$	EXEMPLES
$u + v$		$f(x) = x^2 + 3x$
$u - v$		
$k\times u$ k constante réelle		$f(x) = 3\sqrt{x}$
$u\times v$		$f(x) = (x^2 + 3x)\times(3\sqrt{x} + 1)$

u^n		$f(x) = (x^2+3x)^{12}$
$\frac{1}{u}$		$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$
$\frac{u}{v}$		$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x}$
$\sqrt{u}$		$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$
$\ln(u)$		$f(x) = \ln(x^2+3x)$
e^u		$f(x) = e^{x^2+3x}$