CHAPITRE 09:
APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I- ETUDE DU SENS DE VARIATION DES FONCTIONS

1- <u>SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I alors :
(a) Si $\forall x \in I$; $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I
(b) Si $\forall x \in I$; $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I
(c) Si $\forall x \in I$; $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

<u>Remarque</u>: f est monotone si f est seulement croissante ou seulement décroissante.

<u>POINT METHODE</u> : COMMENT DÉTERMINER LES VARIATIONS D'UNE FONCTION

- On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$
- On étudie le signe de $f'(x)$
- On en déduit les variations de f et on conclut par des phrases. Si le tableau de variation est demandé, on le dresse.

Un tableau de variation doit toujours comporter les limites sauf indications contraires ! ! !

<u>Exemple</u>: étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} - x$ puis dresser son tableau de variation.

2- EXTREMUM

On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J$: $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

Remarque: Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

POINT METHODE : FAIRE LE LIEN ENTRE EXTREMA ET DERIVÉE

- On repère les extrema locaux de f en lesquels f' doit s'annuler en changeant de signe.
- On repère la nature de chaque extremum:
  - si c'est un maximum, la dérivée doit être positive " avant " et négative " après "
  - si c'est un minimum, la dérivée doit être négative " avant " et positive " après ".

Exemple : voir le tableau de variations de l'exemple précédent

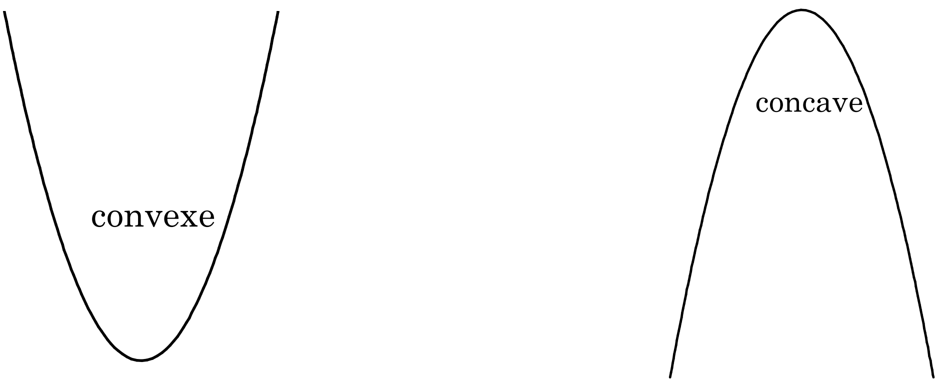
II- CONVEXITÉ

1- DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que la fonction ***f* est convexe** sur I si la portion de courbe représentative correspondant à tout segment $[a,b]$ inclus dans I est en dessous de la corde passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$

- On dit que la fonction ***f* est concave** sur I si la portion de courbe représentative correspondant à tout segment $[a,b]$ inclus dans I est au-dessus de la corde passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$



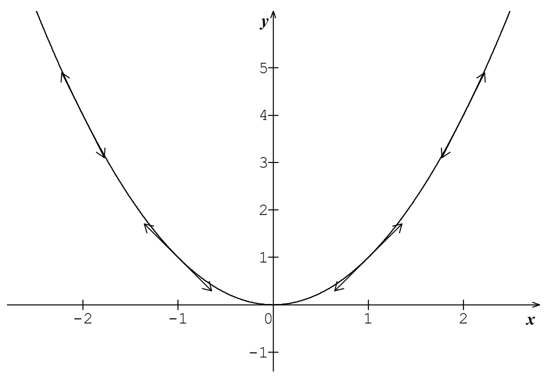
POINT METHODE :COMMENT REPERER UNE FONCTION CONVEXE OU CONCAVE

- On regarde l'allure de la courbe.
  - si elle fait une "bosse" , f est concave
  - si elle fait un "U" , f est convexe

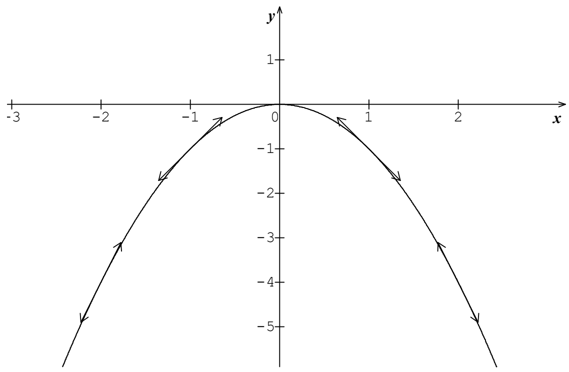
2- <u>PROPRIÉTÉS</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I

- f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes.
- f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes.



convexe



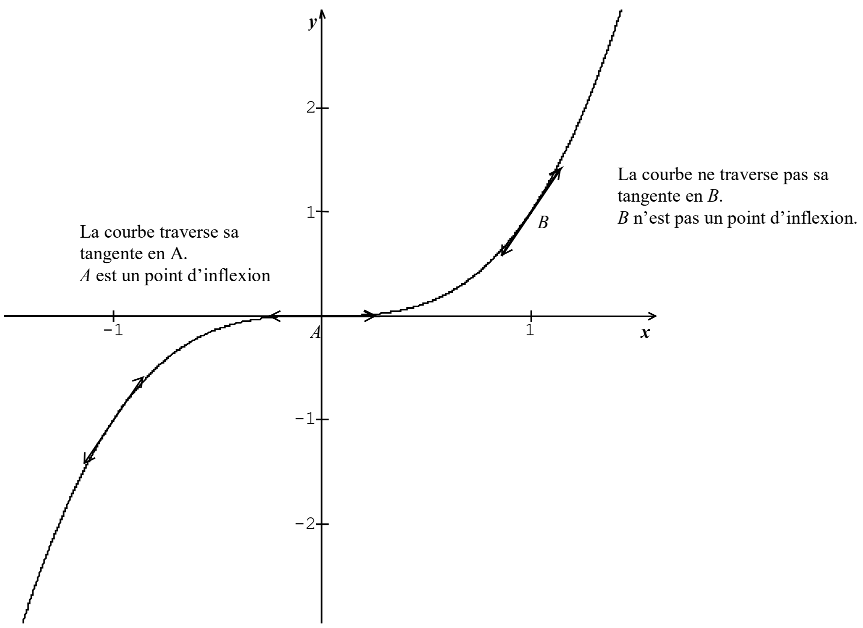
concave

3- <u>POINT D'INFLEXION</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

Soit $a \in I$

On dit que le point $M(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ lorsque f passe de " convexe " à " concave " ou inversement.



4- THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe
f est convexe si et seulement si $\forall\ x \in I, f''(x) \geq 0$
f est concave si et seulement si $\forall\ x \in I, f''(x) \leq 0$

POINT METHODE :COMMENT ÉTUDIER LA CONVEXITÉ D'UNE FONCTION

- On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f' puis on calcule $f''(x)$
- On étudie le signe de $f''(x)$ (souvent par un tableau de signe)
- On en déduit la convexité de f

Exemple 1:
$f(x) = x^3$

Exemple 2:
$f(x) = x^4$

III- BIJECTION

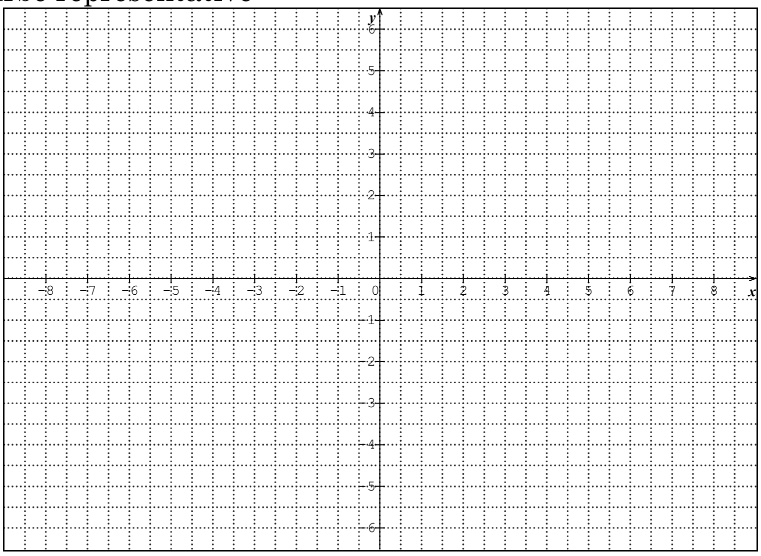
1- NOTION DE CONTINUITÉ

Une fonction est continue sur un intervalle I si :

- ♦ elle est définie sur cet intervalle I
- ♦ Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ se trace “ sans lever le crayon ” sur cet intervalle

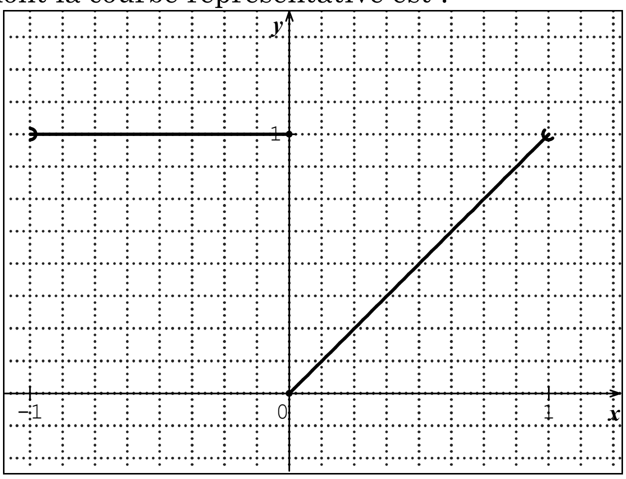
Exemples :

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = -x+3$
Tracer sa courbe représentative



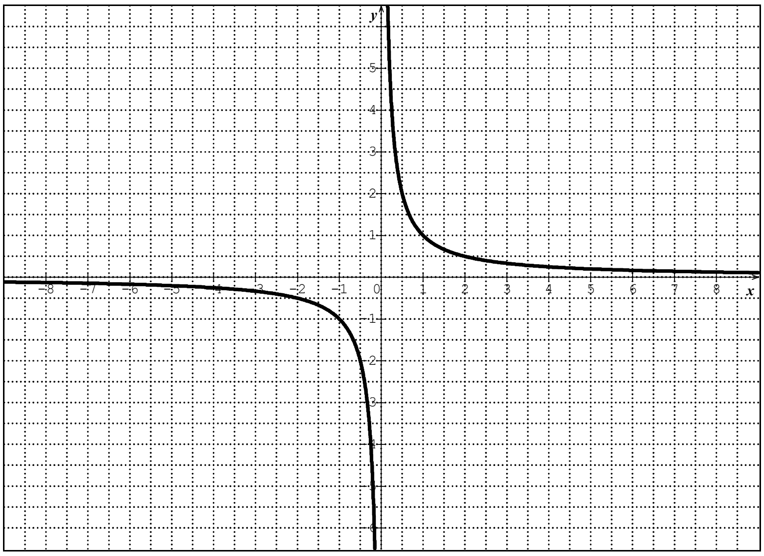
Est–elle continue sur $\mathbb{R}$?

❷ Soit f la fonction dont la courbe représentative est :



Est–elle continue sur $[-1 \; ; \; 1]$?

❸ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dont l'allure est donnée ci-dessous



Est–elle continue sur $\mathbb{R}^*$?

Propriétés admises

a) Toutes les fonctions que vous connaissez (affine, carrée, inverse, cube, puissance, racine, logarithme, exponentielle ..) sont continues sur les intervalles de leurs ensembles de définition.

b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

- $f + g$ est continue sur I
- $f - g$ est continue sur I
- $f * g$ est continue sur I
- e^f est continue sur I
- $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I si $\forall\, x \in I$, $g(x) \neq 0$
- $\sqrt{f}$ est continue sur I si $\forall\, x \in I$, $f(x) \geq 0$
- $\ln(f)$ est continue sur I si $\forall\, x \in I$, $f(x) > 0$

2- Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Si f est continue sur I,
Si f strictement monotone sur I
Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que les limites aux bornes de Df
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$ puis que l'une appartient à l'intervalle $[2 \; ; \; 3]$.
4. Etablir le tableau d'étude de signes de f